

Funkcje Analityczne

10.02.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx.$$

Zadanie 2. (10p.)

Niech $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^2 + 8z + 1$.

- (a) Wyznacz liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 3/2\}$.
- (b) Pokaż, że P ma 4 pierwiastki w $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0\}$, przy czym dwa w pierwszej ćwiartce.

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0, 1)$.

- (a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
- (b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzne przeprowadzające Ω na $D(0, 1)$.

Zadanie 4. (10p.)

- (a) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, który zawiera jednostkowy dysk domknięty $\overline{D}(0, 1)$. Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$. Pokaż, że istnieje stała c taka, że dla dowolnego $|\zeta| < c$, równanie

$$z = \zeta \cdot f(z)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $z_0(\zeta)$ na dysku $D(0, 1)$.

- (b) Pokaż, że dla $|\zeta| < c$, gdzie c jest taka jak w poprzednim punkcie, zachodzi następująca równość

$$z_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1} g_n(z) \right] \Big|_{z=0},$$

gdzie $g_n(z) = f(z)^n(1 - \xi f'(z))$.

Wskazówka: Policz na dwa sposoby całkę $\int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz$, gdzie $F(z) = z - \zeta f(z)$.

Zadanie 5. (10p.)

Dla $R > 0$ niech $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$. Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) = z^2 + 6z + 1$.

- (a) Pokaż, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że na obszarze Ω_{R_0} istnieją dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji f .

Uwaga: Gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji f na Ω_R nazywamy funkcję ciągłą g określoną na Ω_R , która spełnia $g(z)^2 = f(z)$.

- (b) Niech g oznacza gałąź pierwiastka kwadratowego z f określoną na Ω_{R_0} , która przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią w punkcie $z = 2R_0$. Pokaż, że funkcja $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.
- (c) Niech g będzie taka jak w poprzednim punkcie. Załóżmy, że

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

jest rozwinięciem funkcji g w szereg Laurenta na Ω_{R_0} . Wyznacz współczynniki a_0, a_1, a_{-1} .

- (d) Wyznacz wartość całki $\int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz$ (okrąg, po którym całkujemy, jest zorientowany dodatnio).

Zadanie 6. (10p.)

Założmy, że $f: D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ jest holomorficzna.

- (a) Pokaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in D(0, 1)$ zachodzi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|.$$

Podpowiedź: Dla ustalonego z_1 złoż f z odpowiednią homografią i skorzystaj z lematu Schwarza.

- (b) Pokaż, że dla dowolnego $z \in D(0, 1)$ zachodzi nierówność

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx.$$

Rozwiązanie:

Dla ustalonego $R > 0$ rozważmy dwie drogi: odcinek $[-R, R]$ oraz łuk $\gamma_R = \{R \cdot \exp(it) : t \in [0, \pi]\}$. Rozważmy również cykl $\Gamma_R = [-R, R] + \gamma_R$.

Zauważmy, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{[-R, R]} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz.$$

Całkę $\int_{\Gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz$ liczymy z twierdzenia o residuach. Funkcja podcałkowa ma dwa bieguny $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Mamy

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(z_2) = 0, \quad \operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(z_1) = 1, \quad \text{dla } R > |z_1|.$$

Zatem

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}, z_1 \right).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}, z_1 \right) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{\exp(iz)}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\exp(iz_1)}{z_1 - z_2} = \frac{\exp\left(\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)}{i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\exp(\sqrt{3}/2) (\cos(1/2) - i \sin(1/2))}{i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \exp(\sqrt{3}/2) (\sin(1/2) - i \cos(1/2)) \end{aligned}$$

Czyli dla $R > |z_1|$ mamy

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \exp(\sqrt{3}/2) (\cos(1/2) + i \sin(1/2)).$$

Oszacujmy teraz całkę $\int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz$. Mamy

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{it}) \cdot R \cdot i \cdot e^{it}}{1 + Re^{it} + R^2 e^{2it}} dt \right| \leq \\ &\leq R \cdot \int_0^\pi \frac{|\exp(iRe^{it}) \cdot t|}{|1 + Re^{it} + R^2 e^{2it}|} = R \cdot \int_0^\pi \frac{\exp(-R \sin(t)) \cdot |t|}{|1 + Re^{it} + R^2 e^{2it}|} dt \leq \\ &\leq R \cdot \exp(-R) \cdot \pi \int_0^\pi \frac{dt}{|1 + Re^{it} + R^2 e^{2it}|} \end{aligned}$$

Oszacujmy teraz mianownik. Z nierówności trójkąta mamy

$$|1 + re^{it} + R^2 e^{2it}| \geq |Re^{it} + R^2 e^{2it}| - 1 = R \cdot |1 + Re^{it}| - 1 \geq R(R-1) - 1 = R^2 - R - 1.$$

Zatem

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz \right| \leq \frac{R \exp(-R) \pi^2}{R^2 - R - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{[-R, R]} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp(\sqrt{3}/2) \cos(1/2).\end{aligned}$$

1 Rozwiązanie zadania

1.1 Część (a)

Na wstępie stwierdźmy prosty fakt - liczba pierwiastków $P(z)$ na rozpatrywanym pierścieniu jest równa liczbie pierwiastków o module mniejszym niż $3/2$, minus liczba pierwiastków o module mniejszym niż 1 .

Obydwa te zbiory są obszarami ograniczonymi przez okręgi $|z| = \text{const}$, naturalnym narzędziem do znalezienia liczby miejsc zerowych więc będzie twierdzenie Rouchego. Aby z niego skorzystać, musimy najpierw postanowić jakimi funkcjami będziemy przybliżać $P(z)$ na poszczególnych okręgach.

Zacznijmy od mniejszego okręgu, $|z| = 1$. Moduł wszystkich potęg z jest tam równy 1 , możemy się więc spodziewać, że nasza funkcja będzie dobrze się przybliżać przez składnik o największym współczynniku przy nim - $8z$. Sprawdzając, czy jest to słuszne założenie, faktycznie dostajemy

$$|P(z) - 8z| = |z^9 + 4z^7 - z^2 + 1| \leq |z^9| + |4z^7| + |-z^2| + |1| = 1 + 4 + 1 + 1 = 7 < 8 = |8z|,$$

a zatem, na mocy twierdzenia Rouchego, $P(z)$ i $8z$ mają tyle samo pierwiastków na dysku $|z| < 1$. Jest to oczywiście tylko jeden pierwiastek.

Aby wybrać odpowiednią funkcję dla przybliżenia $P(z)$ na okręgu $|z| = 3/2$ spójrzmy ponownie na poszczególne składowe wielomianu. Gdy patrzymy na wielomian na zbiorze postaci $|z| = A > 1$, intuicja mówi nam, że w moduł całości będzie najprawdopodobniej dominowany przez wyrazy o jak najwyższych potęgach. Korzystając jednak najpierw z (mało precyzyjnego) szacowania $3/2 < 2$ widzimy, że na obecnie rozpatrywanym okręgu

$$|z^9| < |4z^7|,$$

tak więc zacznijmy od próby przybliżenia wielomianu P samym wyrazem $4z^7$. Dostajemy wtedy

$$|z^9 - z^2 + 8z + 1| \leq |z^9| + |z^2| + |8z| + |1| \leq |z^9| + 3 + 12 + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^9 + 16$$

(dla wygody oszacowaliśmy tutaj $|z^2|$ z góry. Chcemy więc teraz pokazać, że

$$\left(\frac{3}{2}\right)^9 + 16 < 4\left(\frac{3}{2}\right)^7 = |4z^7|,$$

czyli równoważnie

$$\frac{9}{4} + \frac{2048}{3^7} < 4,$$

co jest prawdą, ponieważ $3^7 > 3^6 = 81 \cdot 81 = 6561 > 2048$, więc lewa strona nierówności jest mniejsza niż $3 + \frac{1}{4}$. Składając wszystkie pokazane nierówności, otrzymujemy ostatecznie fakt, że

$$|P(z) - 4z^7| < |4z^7|$$

na zbiorze $|z| = 3/2$, tak więc na mocy twierdzenia Rouchego, wielomian $P(z)$ ma 7 pierwiastków na dysku $|z| < 3/2$, jako że $4z^7$ ma siedmiokrotny pierwiastek w zerze.

Łącząc obydwie rezultaty, otrzymujemy, że wielomian $P(z)$ ma 6 pierwiastków na dysku $1 < |z| < 3/2$.

1.2 Część (b)

Aby wykazać tę część zadania, będziemy chcieli skorzystać z zasady argumentu. Będziemy rozpatrywać półokrąg postaci

$$\{z = 0 + iy, y \in [-R, R]\} \cup \{\Re(z) \geq 0, |z| = R\} = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

gdzie orientujemy γ_1, γ_2 tak aby obiegały ograniczony obszar zgodnie z naturalną orientacją $\mathbb{C}$ (tj. γ_1 idzie "od góry do dołu").

Ponieważ $P(z)$ jest wielomianem, to ma skończenie wiele miejsc zerowych i dla odpowiednio dużego $R \in \mathbb{R}$ wszystkie pierwiastki o części rzeczywistej dodatniej będą mieścić się wewnątrz odpowiednio dużego półokręgu.

Aby móc skorzystać z zasady argumentu, musimy pokazać, że $P(z)$ nie ma żadnych miejsc zerowych na rozpatrywanej krzywej. Zakładając, że R jest odpowiednio duże nie może być żadnych miejsc zerowych na γ_2 . Dla γ_1 mamy

$$\Re(P(iy)) = y^2 + 1 > 0,$$

tak więc $P(z)$ nie może mieć miejsc zerowych na osi urojonej.

Spójrzmy teraz na przyrost argumentu wzdłuż poszczególnych krzywych:

Jak pokazaliśmy przed chwilą, obraz γ_1 zawiera się w prawej półpłaszczyźnie. Argument jest jednoznacznie określoną funkcją na tym zbiorze, tak więc przyrost argumentu P wzdłuż γ_1 jest równy po prostu

$$\arg(P(-iy)) - \arg(P(iy)),$$

gdzie $\arg$ jest funkcją przyjmującą wartości z przedziału $(-\pi, \pi)$. Mamy $P(z) = z^9[1 + \frac{4z^7}{z^9} - \frac{z^2}{z^9} + \frac{8z}{z^9} + \frac{1}{z^9}]$, a zatem, korzystając z tego że argument iloczynu to suma argumentów, wnioskujemy że

$$\arg(P(z)) - \arg(z^9) \rightarrow 0$$

przy $R \rightarrow \infty$, ponieważ argument wyrażenia w nawiasie dąży do $\arg(1) = 0$ dla $|z|$ dążącego do nieskończoności. W szczególności otrzymujemy, że

$$\arg(P(\pm iR)) - \arg((\pm iR)^9) \rightarrow 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta \arg_{\gamma_1}(P(z)) = \lim_{R \rightarrow \infty} (-iR^9) - \lim_{R \rightarrow \infty} (iR^9) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Analogicznie, dla łuku γ_2 otrzymujemy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta \arg_{\gamma_2}(P(z)) = \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta \arg_{\gamma_2}(z^9) = \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta 9 \arg_{\gamma_2}(z) = 9\pi.$$

Łącznie więc mamy $\Delta \arg_{\gamma_1 \cup \gamma_2}(P(z)) \rightarrow -\pi + 9\pi = 8\pi$, a zatem dla dostatecznie dużych R ten półokrąg zawiera we wnętrzu $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$ miejsca zerowe $P(z)$.

Aby pokazać, że dwa z tych miejsc zerowych leżą w pierwszej ćwiartce, pokażmy najpierw, że $P(z)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich. W tym celu należy rozpatrzyć przypadki:

- Dla $x = 0$ mamy $P(x) = 1 \neq 0$;
- Jeśli $0 < x \leq 1$, to $x^2 \leq 1$ a zatem $P(x) \geq x^9 + 4x^7 - x^2 + 8x + x^2 > 0$;
- Jeśli $1 < x$, to $x^2 < x^7$, a zatem $P(x) > x^9 + 3x^7 + x^2 - x^2 + 8x + 1 > 0$.

Teraz, ponieważ współczynniki wielomianu $P(z)$ są rzeczywiste, na mocy zasadniczego twierdzenia algebry otrzymujemy że zbiór pierwiastków $P(z)$ jest niezmienniczy ze względu na operację sprzężenia. Innymi słowy zbiór pierwiastków $P(z)$ jest symetryczny ze względu na odbicie względem osi rzeczywistej. Skoro nie ma pierwiastków leżących na tej osi, wnioskujemy że po dwa pierwiastki $P(z)$ muszą leżeć w pierwszej i czwartej ćwiartce, co kończy dowód.

Uwaga: Można też pokazać, że dwa pierwiastki leżą w pierwszej ćwiartce na inny sposób - zamiast rozpatrywać krzywą ograniczającą połowę dysku o części rzeczywistej dodatniej, można rozpatrywać krzywe ograniczające ćwiartki koła (w pierwszej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych). Ostatecznie, rozwiązania te wymagają pokazania dokładnie takich samych faktów w nieco innej kolejności - konieczne jest pokazanie, że nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich aby skorzystać z zasady argumentu dla ćwierćokręgów - tak więc wybór jednej lub drugiej metody jest tak naprawdę wyłącznie kwestią osobistych preferencji.

2 Zasady oceniania

Część (a) jest warta 4 pkt, a część (b) - 6 pkt. W ramach tych części punkty są przydzielone następująco:

Za część (a):

- Za każdy z okręgów $|z| = 1$, $|z| = 3/2$ jeden punkt za dobrą strategię (powołanie się na twierdzenie Rouchego, sensowny wybór funkcji którą przybliżamy $P(z)$);
- Za każdy z okręgów - poprawne pokazanie tezy - sprawdzenie założeń twierdzenia i udowodnienie odpowiedniej nierówności.

Za część (b):

- 1 pkt za odpowiednie podejście - powołanie się na zasadę argumentu i sensowny wybór konturów;
- 1 pkt za pokazanie, że $P(z)$ nie ma pierwiastków na osi urojonej;
- 1 pkt za poprawne policzenie zmiany argumentu wzdłuż pionowego odcinka (odcinków);
- 1 pkt za poprawne policzenie zmiany argumentu po łuku (łukach);
- 1 pkt za pokazanie, że nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich;
- 1 pkt za poskładanie tych wszystkich kroków (policzenie łącznej zmiany argumentu, uzasadnienie że są po dwa pierwiastki w pierwszej i czwartej ćwiartce).

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0, 1)$.

- (a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
 (b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzne przeprowadzające Ω na $D(0, 1)$.

Rozwiązanie:

- (a) Aby wyznaczyć obraz obszaru Ω , wyznaczymy osobno obraz $\mathbb{H}_+$ oraz obraz dysku jednostkowego $D(0, 1)$.

Zauważmy, że współczynniki funkcji h są rzeczywiste, zatem $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ponieważ obrazem prostej $\mathbb{R}$ będzie prosta lub okrąg. Zatem $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$ lub $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$. Mamy $h(i) = i$, czyli $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$.

Policzymy teraz obraz dysku jednostkowego. Skoro $h(-1) = \infty$, oznacza to, że obrazem $\partial D(0, 1)$ będzie prosta. Aby wyznaczyć tę prostą, liczymy wartości h w innych punktach z $\partial D(0, 1)$.

$$h(1) = 0, \quad h(i) = i.$$

Zatem, $h(\partial D(0, 1)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Dodatkowo, $h(0) = -1$, zatem $h(D(0, 1)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Podsumowując,

$$h(\Omega) = h(\mathbb{H}_+) \cup h(D(0, 1)) = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ lub } \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Alternatywnie, można było przedstawić h jako złożenie translacji, inwersji i jednokładności i wyznaczyć kolejno obrazy zbioru Ω .

- (b) Wybierając gałąź funkcji argument tak, aby $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, możemy zapisać

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in (0, 3/2\pi)\}.$$

Niech f będzie gałęzią funkcji $z \mapsto z^{2/3}$ na obszarze Ω , która spełnia

$$f(z) = \exp(2/3 \cdot \log(z)),$$

gdzie $\log(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$. Funkcja f jest dobrze określona i holomorficzna na Ω . Dodatkowo, mamy $f(\Omega) = \mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in (0, \pi)\}$.

Rozważmy teraz homografię $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Wówczas $g(\mathbb{H}_+) = D(0, 1)$. Zatem $(g \circ f)(\Omega) = D(0, 1)$. Dodatkowo, oba odwzorowania są biholomorficzne, tzn. każde z nich jest holomorficznym homeomorfizmem, którego odwrotność też jest odwzorowaniem holomorficznym.

Funkcje Analityczne

10.02.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2} dx.$$

Zadanie 2. (10p.)

Niech $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^2 + 8z + 1$.

- (a) Wyznacz liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 3/2\}$.
- (b) Pokaż, że P ma 4 pierwiastki w $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0\}$, przy czym dwa w pierwszej ćwiartce.

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0, 1)$.

- (a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
- (b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzne przeprowadzające Ω na $D(0, 1)$.

Zadanie 4. (10p.)

- (a) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, który zawiera jednostkowy dysk domknięty $\overline{D}(0, 1)$. Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$. Pokaż, że istnieje stała c taka, że dla dowolnego $|\zeta| < c$, równanie

$$z = \zeta \cdot f(z)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $z_0(\zeta)$ na dysku $D(0, 1)$.

- (b) Pokaż, że dla $|\zeta| < c$, gdzie c jest taka jak w poprzednim punkcie, zachodzi następująca równość

$$z_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1} g_n(z) \right] \Big|_{z=0},$$

gdzie $g_n(z) = f(z)^n (1 - \xi f'(z))$.

Wskazówka: Policz na dwa sposoby całkę $\int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz$, gdzie $F(z) = z - \zeta f(z)$.

Zadanie 5. (10p.)

Dla $R > 0$ niech $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$. Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) = z^2 + 6z + 1$.

- (a) Pokaż, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że na obszarze Ω_{R_0} istnieją dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji f .

Uwaga: Gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji f na Ω_R nazywamy funkcję ciągłą g określoną na Ω_R , która spełnia $g(z)^2 = f(z)$.

- (b) Niech g oznacza gałąź pierwiastka kwadratowego z f określoną na Ω_{R_0} , która przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią w punkcie $z = 2R_0$. Pokaż, że funkcja $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.
- (c) Niech g będzie taka jak w poprzednim punkcie. Załóżmy, że

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

jest rozwinięciem funkcji g w szereg Laurenta na Ω_{R_0} . Wyznacz współczynniki a_0, a_1, a_{-1} .

- (d) Wyznacz wartość całki $\int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz$ (okrąg, po którym całkujemy, jest zorientowany dodatnio).

Zadanie 6. (10p.)

Założmy, że $f: D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ jest holomorficzna.

- (a) Pokaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in D(0, 1)$ zachodzi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|.$$

Podpowiedź: Dla ustalonego z_1 złoż f z odpowiednią homografią i skorzystaj z lematu Schwarza.

- (b) Pokaż, że dla dowolnego $z \in D(0, 1)$ zachodzi nierówność

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Funkcje analityczne, Egzamin 1, 2022/23.

Zadanie 4:

a) Zastosujemy tw. Rouchy'ego.

Mamy dla $z \in \partial D(0,1)$: $|z| < C$

$$|z - \xi f(z)| \leq |z| \underbrace{\sup_{\xi \in D(0,1)} |f(z)|}_{=: M} \leq CM < 1 = |z|$$

Np dla $C := \frac{1}{M+1}$

Stąd funkcje $h(z) = z$, oraz $g(z) = z - \xi f(z)$ mają wewnątrz dysku $D(0,1)$ tyle samo zer, czyli 1.

b) Rozważmy $F(z) = z - \xi f(z)$, gdzie $|z| < C$, C - z punktu a).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz = I$$

gdzie przyjmujemy dodatnią orientację $\partial D(0,1)$.

Funkcje $G(z) := \frac{z F'(z)}{F(z)}$ - ma w $z_0(\xi)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{położony, że} \\ z_0(\xi) = \xi f(z_0(\xi)) \end{array} \right.$

będzie mieć rząd 1, zatem

$$I = \text{res} (G(z), z_0(\xi)) = \lim_{z \rightarrow z_0(\xi)} \frac{(z - z_0(\xi)) \cdot z (f'(z))}{F(z)} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0(\xi)} \frac{z (1 - \xi f'(z))}{\underbrace{\frac{F(z) - F(z_0(\xi))}{z - z_0(\xi)}}_{\rightarrow F'(z_0(\xi))}} = z_0(\xi) \cdot \frac{F'(z_0(\xi))}{F'(z_0(\xi))} = z_0(\xi).$$

obliczamy I innym sposobem.

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = \frac{z F'(z)}{z - \xi f(z)} = F'(z) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi f(z)}{z}} = (*)$$

$$\text{Na } \partial D(0,1): |z|=1 \quad \left| \frac{\xi f(z)}{z} \right| = |\xi f(z)| < C \cdot \sup_{\partial D(0,1)} |f| < 1$$

2 redukcji w rzd 9)

$$\Rightarrow (*) = F'(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (f'(z))^n}{z^n} = (1 - \xi f'(z)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (f'(z))^n}{z^n} =$$

$$= (1 - \xi f'(z)) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \xi f'(z)) \frac{\xi^n (f'(z))^n}{z^n} =$$

Stąd

$$I = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{\partial D(0,1)} (1 - \xi f'(z)) dz}_{=0 \text{ bo}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{(1 - \xi f'(z)) \xi^n (f'(z))^n}{z^n} dz$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big|_{z=0} g_n(z)$$

całkowicie funkcje holomorficzne

← stąd teza. Przedstawiamy rozwiązanie w rozszerzonej wartości

$$= \sum_{n \geq 1} \xi^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{g_n(z)}{z^n} dz$$

- nie wyrażenie.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\xi^n (f(z))^n}{z^n} dz - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\xi^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \left[(f(z))^{n+1} \right]'}{z^n} dz$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \underbrace{\left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(f(z))^n \right] \right|_{z=0}}_{C_n} - \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)(n-1)!} \underbrace{\left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(f(z))^{n+1} \right] \right|_{z=0}}_{= C_{n+1}}$$

$\uparrow$ wzór Cauchy'ego

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{(n-1)!} C_n - \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^{n+1}}{n!} \left(\frac{n}{n+1} \right) C_{n+1} =$$

$\nwarrow n := n+1$

$$= \underbrace{\frac{\xi^1}{1} C_1}_{n=1} + \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n C_n}{(n-1)!} - \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \left(\frac{n-1}{n} \right) C_n \right)$$

$$= \xi \cdot C_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \underbrace{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)}_{\frac{1}{n}} C_n =$$

$$= \frac{\xi}{1!} C_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{n!} C_n =$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(f(z))^n \right] \right|_{z=0}}$$

Zatem też można było skrócić

też w wersji rozszerzonej .



W przypadku oceny ze punkt b) ;

• ze prawidłowy rachunek : $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz = z_0$ -

- dostawo sę 2,5 pt

• ze dowód
tożsamości : $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \right|_{z=0} [g_n(z)]$

- dostawo sę 2,5 pt.

A. Katarzyska

Na temat zadania 5/10.11.2023

część (a)	3p.
część (b)	1p.
część (c)	4p.
część (d)	2p.

(a) Za R_0 można przyjąć większy z modułów pierwiastków wielomianu $f(z) = z^2 + 6z + 1$, $z_1 = -3 - \sqrt{8}$, $z_2 = -3 + \sqrt{8}$, $R_0 = |z_1| = 3 + \sqrt{8}$.

Bowiem dla $|z| > 3 + \sqrt{8}$, tzn. dla $|\frac{-z_1}{z}|, |\frac{-z_2}{z}| < 1$ mamy funkcje holomorficzne na $\mathcal{R}_{R_0}$ oznaczone $(1 - \frac{z_1}{z})^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (\frac{-z_1}{z})^n$ oraz $(1 - \frac{z_2}{z})^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (\frac{-z_2}{z})^n$. Te szeregi są bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżne na $\mathcal{R}_{R_0}$ — wyrażają jednoznacznie wyznaczone funkcje holomorficzne na $\mathcal{R}_{R_0}$ (por. Leja, strona 102).

Skoro $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2(1 - \frac{z_1}{z})(1 - \frac{z_2}{z})$, dostajemy dwie rozłączne w wartościach holomorficzne (a nie tylko ciągłe) gałęzie dla $\sqrt{f(z)}$: $g_1(z) = -z(1 - \frac{z_1}{z})^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{z_2}{z})^{\frac{1}{2}}$ oraz $g_2(z) = z(1 - \frac{z_1}{z})^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{z_2}{z})^{\frac{1}{2}}$.

(b) Niech $g(z) := g_2(z)$, bo $g_2(2R_0) = \text{arytmetyczny } \sqrt[2]{105 + 36\sqrt{8}} > 0$.

Teraz $h(z) = \frac{g(z)}{z} = (1 - \frac{z_1}{z})^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{z_2}{z})^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 = 1$, więc funkcja h ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.

(c) Funkcja h regularna w ∞ zapisuje się jako $h(z) = b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots$, więc gałąź g zapisuje się jako $g(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$ ($a_k = b_{k-1}$). Jest to jej szereg Laurenta w jej dziedzinie $\mathcal{R}_{R_0}$.

$$\begin{aligned} \text{Konkretnie } g(z) &= z \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{z_1}{z} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{z_1}{z} \right)^2 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{z_2}{z} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{z_2}{z} \right)^2 + \dots \right) \\ &= z + \frac{1}{2}(-z_1 - z_2) + \left(\frac{1}{4}(-z_1)(-z_2) - \frac{1}{8}((-z_1)^2 + (-z_2)^2) \right) \frac{1}{z} + \dots \\ &= z + 3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot 34 \right) \frac{1}{z} + \dots = z + 3 - \frac{4}{z} + \dots \end{aligned}$$

(szeregi Newtona są bezwzględnie zbieżne, więc tu tw. Abela),
czyli $a_1 = 1$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = -4$.

(d) Wartość całki $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz$ wynosi $-a_{-1} = -(-4) = 4$ (Leja, strona 136),
zatem $\int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz = -2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz \right) = -8\pi i$.

Zad. 6. (*) Oznaczmy $h_1(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \bar{z}_1 z}$ - jest to automorfizm dysku (wykład) (Ale tylko gdy $|z_1| < 1$.)

Wtedy $h_1^{-1}(z)$ jest automorfizmem dysku

~~Porozpatrzmy $H(f(h_1^{-1}(z)))$. Widać, że $h(f(h_1^{-1}(z))) = h(f(z_1))$~~
 Oznaczmy $h_2(z) = \frac{f(z_1) - f(z)}{1 - \bar{f}(z_1) f(z)}$ (też $\in H(D(0,1))$)
 $\cong$ zamiast $f(z)$ ($\times 2$).

Porozpatrzmy $H(z) = h_2(f(h_1^{-1}(z)))$ dla $z=0$ $h_1^{-1}(0) = z_1$, $h(f(z_1)) = 0$

$|H(z)| < 1$, $H \in H(D(0,1))$. Spełnione są założenia lematu

Schwarza. Zatem mamy $|H(z)| \leq z$ ($\forall z \in D$)

$$\left| \frac{f(z_1) - f(h_1^{-1}(z))}{1 - \bar{f}(z_1) f(h_1^{-1}(z))} \right| \leq |z|$$

podstawiając
 $z = \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ otrzymujemy
 też (e)
 $\parallel$
 $h(z)$, więc $\in D$.

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \bar{f}(z_1) f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

z_2 możemy wziąć dowolnie
 $z \in D(0,1)$
 z_1 ustaliliśmy na początku,
 ale też dowolnie.

6(b) z punktu (a) dla $z_1 \neq z_2$ zachodzi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \cdot \frac{1}{|1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)|} \leq \frac{1}{|1 - \overline{z_1}z_2|}$$

przechodząc
z $z_2 \rightarrow z_1$
długości

$$|f'(z_1)| \cdot \frac{1}{|1 - \overline{f(z_1)}f(z_1)|} \leq \frac{1}{|1 - \overline{z_1}z_1|}$$

$z = z_1$

A nawet wyrażenia
pod modułami
w mianownikach są 20
(z tego samego
powodu).

$$\frac{|f'(z)|}{|1 - |f(z)|^2|} \leq \frac{1}{|1 - |z|^2|}$$

w przejściu do granicy
mianowniki nierówne, bo

$$z \in D(0,1)$$

$$f(z) \in D(0,1)$$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

$f \in H(D(0,1))$ i więc pochodna
istnieje.

Funkcje Analityczne – egzamin termin zerowy

26.01.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)}.$$

Zadanie 2. (10p.)

Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $P(z) = z^8 - 13z^5 + 7$ w:

- (a) pierścieniu $1 < |z| < 3$;
- (b) półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Zadanie 3. (10p.)

- (a) Pokaż, że homografia postaci

$$h(z) = \frac{z+b}{z+d}$$

przekształca dysk jednostkowy $D := D(0, 1)$ na obszar $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = -d$ oraz $|b| = 1$.

- (b) Dla dowolnie wybranych punktów $p \in D$, $q \in D \setminus \{0\}$, pokaż, że istnieje holomorficzna suriekcja

$$f : D \rightarrow D \setminus \{0\}$$

taka, że $f(p) = q$.

Zadanie 4. (10p.)

Niech $Q \subset \mathbb{C}$ oznacza domknięty czworokąt (razem z wnętrzem) o wierzchołkach ± 1 , $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ oraz niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus Q$. Rozważmy następującą funkcję na obszarze Ω

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}.$$

- (a) Niech γ będzie okręgiem o środku 0 i promieniu 2 ze standardową orientacją. Wyznacz wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

- (b) Czy na zbiorze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log f(z)$? Innymi słowy, czy na Ω istnieje funkcja holomorficzna g taka, że $\exp(g) = f$?

Zadanie 5. (10p.)

Założmy, że funkcja $F(z)$ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$, która ma pojedyncze bieguny w punktach $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ oraz spełnia:

1. $F(z+1) = zF(z)$, dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$,
2. $F(1) = 1$

Wyznacz $\text{Res}(f, k)$, dla $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Zadanie 6. (10p.)

Założmy, że f jest holomorficzna na $D(0, 1)$ oraz spełnia $f(0) = 0$, $\text{Re } f(z) < 1$. Pokaż, że spełnione są następujące nierówności:

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}, \quad |f'(0)| \leq 2.$$

Vazgen Bagdasaryan, nr indeksu ~~101120~~, gr. dr Strzeleckiej

Zad. 1

(10) A. Kałamajska

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = (*)$$

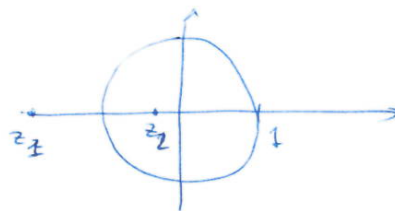
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \theta \mapsto z$$

$$(*) \int_0^{2\pi} \frac{dz}{2 + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \cdot \frac{ie^{iz}}{ie^{iz}} dz = \left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{it} \\ t \in [0, 2\pi) \\ x'(t) = ie^{it} \end{array} \right\} = \partial \mathbb{D}$$

$$= \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4 + z + \frac{1}{z}} dz =$$

$$= \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z \cdot \frac{4z^2 + z + 1}{z}} dz = \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{4z^2 + z + 1} dz =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ z_1 = \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3.7 \\ z_2 = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3} \approx -0.3 \end{array} \right.$$



$$= \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} dz = \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}}}{z + 2 - \sqrt{3}} dz =$$

uz. Cauchy
ind_{∂D}(z₂) = 1

$$\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot g(z_2) = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}} \Big|_{z = -2 + \sqrt{3}} =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Reguły punktacji: ogólnie zadanie nie sprawiło problemu. Za drobny błąd rachunkowy lecz poprawne rozumowanie odejmowałam około 2 pt (A. Kałamajska)

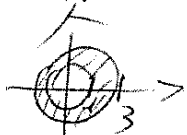
2.

$$f(z) = z^8 - 13z^5 + 7$$

w domyśle zakładam, że mowa
o pierwi. + krotnościami

gor Buchowier

a)



zbadamy ile jest zer w $D(0, 3)$ oraz w $D(0, 1)$
najpierw $D(0, 1)$

(10) A. Keten

określamy $f(z) = -13z^5$, $g(z) = z^8 + 7$, pokazujemy, że na $\{z: |z|=1\}$
 $|f| > |g|$ stąd z tw. Rouché'go $f+g$ będzie mieć tyle zer co f
na $D(0, 1)$

$$|g| = |z^8 + 7| \leq |z|^8 + 7 = 1 + 7 = 8 < 13 = |f|$$

stąd w $D(0, 1)$ $f+g=P$
ma 5 zer, bo tyle
ma ich f .
(zas. tw. algebry)

teraz na $D(0, 3)$

znów określamy $f(z) = z^8$, $g(z) = -13z^5 + 7$

$|f| > |g|$ na $\{z: |z|=3\}$, istotnie

$$|g| = |-13z^5 + 7| \leq 13|z|^5 + 7 = 13 \cdot 3^5 + 7 < 3^8 = |f|$$

($13 \cdot 3^3 = 27$)

zatem z tw. Rouché'go $P=f+g$ ma tyle zer na $D(0, 3)$ co f ,
czyli dokł. 8 (znow z zas. tw. algebry).

Pokazaliśmy, że na zbiorze $\{z: 1 \leq |z| < 3\}$ P ma $8-5=3$ zera.

Odczytując na $|z|=1$ $P(z) \neq 0 \Rightarrow$ odp: 3 zera.

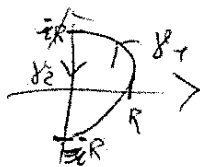
a) 5



określamy kontur

zbadamy przyrost

argumentu $P(z)$ na γ_1, γ_2 i skorzystamy z zas.
argumentu ($\infty \rightarrow \infty$)



przyrost na γ_2

$$\Delta \arg P = \arg P(-iR) - \arg P(iR) = \arg(R^8 + 13iR^5 + 7) - \arg(R^8 - 13iR^5 + 7)$$

$$= \arg\left(R^8\left(1 + \frac{13i}{R^3} + \frac{7}{R^8}\right)\right) - \arg\left(R^8\left(1 - \frac{13i}{R^3} + \frac{7}{R^8}\right)\right)$$

$$= \arg R^8 + \arg\left(1 + \frac{13i}{R^3} + \frac{7}{R^8}\right) - \arg R^8 - \arg\left(1 - \frac{13i}{R^3} + \frac{7}{R^8}\right) = o(1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$\begin{matrix} \parallel R \in \mathbb{R} & \parallel o(1) & \parallel R \in \mathbb{R} & \parallel o(1) \end{matrix}$

zatem na γ_2 przyrost jest zerowy

2.
b)

b) 5

Igor Buchowier

przebieg na γ_1

$$\begin{aligned}\arg P(z) &= \arg(z^8 - 13z^5 + 7) = \arg\left(z^8\left(1 - \frac{13}{z^3} + \frac{7}{z^8}\right)\right) = \arg z^8 + \arg\left(1 - \frac{13}{z^3} + \frac{7}{z^8}\right) \\ &= \arg R^8 e^{8i\theta} + o(1) = 8 \cdot \tilde{1} + o(1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \underline{\underline{8\tilde{1}}} \\ &\quad \theta \in \left(-\frac{\tilde{1}}{2}, \frac{\tilde{1}}{2}\right)\end{aligned}$$

Zatem z zasady argumentu liczba zer $P(z)$ na $\{ \operatorname{Re} z > 0 \}$ wynosi $\frac{8\tilde{1}}{2\tilde{1}} = \underline{\underline{4}}$ } bo $P(z)$ nie ma biegunów {

(*) mogliśmy > nie skorzystać, bo d.d.d. R $P(z)$ nie ma pierwi. na γ_1 oraz

$$P(iy) = y^8 - 13iy^5 + 7 = 0 \Leftrightarrow y^8 + 7 = 0, \text{ ale } y \in \mathbb{R}$$

zatem tu też P
nie ma pierwiastka

Informacja o punktacji: części a) oraz b) było oceniane maksymalnie po 5pt.
Zadanie ogólnie nie sprawiało dużych problemów.

Matematyka Bonn ~~2020~~

3. a) $\{ \operatorname{Re} z < 0 \} = \{ |z+1| < |z-1| \}$, gdyż punkt $\operatorname{Re} z = 0$

jest symetralną odcinka $[-1, 1]$ i punkt -1 leży na półprostej $\operatorname{Re} z < 0$.

Zatem

$$h(z) \in \{ \operatorname{Re} z < 0 \} \Leftrightarrow |h(z)+1| < |h(z)-1| \Leftrightarrow \left| \frac{z+b+z+d}{z+d} \right| < \left| \frac{z+b-z-d}{z+d} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| z + \frac{b+d}{2} \right| < \frac{|b-d|}{2} \Leftrightarrow z \in D\left(-\frac{b+d}{2}, \frac{|b-d|}{2}\right).$$

Jako, że homografia przekształcająca D na $\mathbb{H}_+$ jest lżejszą niż

tych obszarami, to h przekształca D na $\mathbb{H}_+$ w ten sposób.

$$\forall z (z \in D \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{H}_+) \quad \text{w ten sposób} \quad (z \in D(0,1) \Leftrightarrow z \in D(-\frac{b+d}{2}, \frac{|b-d|}{2}))$$

$$\text{w ten sposób} \quad D(0,1) = D(-\frac{b+d}{2}, \frac{|b-d|}{2}) \quad \text{w ten sposób} \quad (0 = -\frac{b+d}{2} \wedge \frac{|b-d|}{2} = 1)$$

$$\text{w ten sposób} \quad (b = -d \wedge \frac{|b-d|}{2} = 2) \quad \text{w ten sposób} \quad (b = -d \wedge |2b| = 2) \quad \text{w ten sposób}$$

$$(b = -d \wedge |b| = 1) \quad \square \quad (\text{oczywiście należy } b \neq d, \text{ bo inaczej nie ma homografii})$$

Zad 3 Guesito Potryki gr. 1 nr ~~222~~ ~~222~~

$$h(z) = \frac{z+b}{z+d}$$

a) ~~Wskaz~~ "Zatwierdźmy że $b = -d$ i $|b| = 1$ wtedy $h(z) = \frac{z+b}{z-b}$

$$\text{Wówczas } h(x+iy) = \frac{x+iy+b}{(x+b)+iy} = \frac{((x+b)+iy)((x-b)-iy)}{(x-b)^2+y^2} = \frac{x^2-b^2+y^2+i(-2b)}{(x-b)^2+y^2}$$

Zatem $\operatorname{Re}(h(x+iy)) = \frac{x^2+y^2-b^2}{(x-b)^2+y^2}$ więc jeśli $z = x+iy \in D(0,1)$ ($x^2+y^2 < 1$)

to $h(x+iy) \in \mathbb{H}_-$ i dla każdego $m, n \in \mathbb{R}$ istnieje $x, y \in \mathbb{R}$ t.j. ~~istnieje~~

$$\frac{x^2-b^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = m \quad \text{ oraz } \quad \frac{-2b}{(x-b)^2+y^2} = n$$

więc h przekształca $D(0,1)$ na $\mathbb{H}_-$ gdy $d = -b$ oraz $|b| = 1$

" $\Rightarrow$ " Jeśli $h: D(0,1) \rightarrow \mathbb{H}_-$ to $h: \partial D(0,1) \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Zatem jeśli $|z| = 1$ to $\operatorname{Re}(h(z)) = 0$

W szczególności $\operatorname{Re}(h(1)) = \operatorname{Re}(h(-1)) = \operatorname{Re}(h(i)) = \operatorname{Re}(h(-i)) = 0$

$$h(1) = \frac{1+b}{1+d} = \frac{(1+b)(1+\bar{d})}{(1+d)(1+\bar{d})} = \frac{1+b+\bar{d}+b\bar{d}}{1+2\operatorname{Re}(d)+|d|^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(1+b+\bar{d}+b\bar{d}) = 0$$

$$h(-1) = \frac{-1+b}{-1+d} = \frac{(-1+b)(-1+\bar{d})}{(-1+d)(-1+\bar{d})} = \frac{1-b-\bar{d}+b\bar{d}}{1-2\operatorname{Re}(d)+|d|^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(1-b-\bar{d}+b\bar{d}) = 0$$

$$h(i) = \frac{i+b}{i+d} = \frac{(i+b)(-i+\bar{d})}{(i+d)(-i+\bar{d})} = \frac{1+i\bar{d}-ib+b\bar{d}}{1+i(\bar{d}-d)+|d|^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(1+i\bar{d}-ib+b\bar{d}) = 0$$

$$h(-i) = \frac{-i+b}{-i+d} = \frac{(-i+b)(i+\bar{d})}{(-i+d)(i+\bar{d})} = \frac{1-i\bar{d}+ib+b\bar{d}}{1-i(\bar{d}-d)+|d|^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(1-i\bar{d}+ib+b\bar{d}) = 0$$

$$\Rightarrow b = -d \quad \text{ oraz } \quad |b| = 1$$

Zadanie 3 - metoda geometryczna

Metodę zaproponował pan Kamil Ciebiera.

(a) - pokazujemy tylko część " $\implies$ ".

Wiemy, że każda homografia zachowuje symetrię względem okręgów wielkich, ponadto

$$H : S^1(0, 1) \rightarrow i\mathbb{R}.$$

Niech

$$z_1^* := S_{S^1}(-b), \quad z_2^* S_{S^1}(-d),$$

gdzie $S_{S^1}(\cdot)$ to symetria względem okręgu $S^1(0, 1)$. zatem $h(z_1^*)$ i $h(-b) = 0$, oraz $h(z_2^*)$ i $h(-d) = \infty$ są wzajemnie symetryczne względem $i\mathbb{R}$, to znaczy

$$S_{i\mathbb{R}}(0) = h(z_1^*) \text{ oraz } S_{i\mathbb{R}}(\infty) = h(z_2^*),$$

gdzie $S_{i\mathbb{R}}$ to symetria względem prostej $i\mathbb{R}$. Ponieważ $0, \infty \in i\mathbb{R}$, zatem są one symetryczne względem siebie, co oznacza, że są one tym samym co ich odbicia symetryczne:

$$S_{i\mathbb{R}}(0) = 0 = h(z_1^*) \text{ oraz } S_{i\mathbb{R}}(\infty) = \infty = h(z_2^*),$$

stąd $-b$ i $-d$ są tym samym co ich odbicia symetryczne względem S^1 , czyli punkty te należą do S^1 :

$$h(-b) = h(z_1^*), \quad h(-d) = h(z_2^*) \implies z_1^* = -b, \quad z_2^* = -d \implies -b, -d \in S^1.$$

To daje $|b| = |d| = 1$.

Teraz pokażmy, że $b = -d$. Skoro $d \in S^1$, to $h(d) = \frac{b+d}{2d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{b}{d} \in i\mathbb{R}$, ma część rzeczywistą zero, co daje $\operatorname{re}(\frac{b}{d}) = -1$. Wtedy

$$\frac{b}{d} \in S^1 \text{ oraz } \operatorname{re}(\frac{b}{d}) = -1,$$

co implikuje że $\operatorname{im}(\frac{b}{d}) = 0$, a stąd $\frac{b}{d} = -1$, $b = -d$.

(b) Rozważmy następujące przekształcenia:

- $f_1 = h$ - homografia z punktu (a);
- $f_{a,b}(z) := az + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ - przekształcenie afiniczne. Widzimy, że

$$f_{a,b} : H_- \xrightarrow{1-1, na} H_-,$$

dla $H_- = \{z : \operatorname{rez} < 0\}$;

- $f_3(z) = e^z$. Widzimy, że $f_3 : H_- \rightarrow D(0, 1) \setminus \{0\}$, wzajemnie jednoznacznie.

Definiujemy

$$F(z) := f_3 \circ f_{a,b} \circ f_1(z), \quad F : D \xrightarrow{1-1, na} D \setminus \{0\},$$

wzajemnie jednoznacznie. Teraz wystarczy dobrać a, b tak, aby $F(p) = q$. Aby się upewnić że tak możemy zrobić, zauważamy, że musi zachodzić warunek:

$$e^{ah(p)+ib} = q$$

Ponieważ $q \neq 0$, q leży w pewnym obszarze gdzie istnieje holomorficzna gałąź logarytmu (nie w całym dysku lecz w jego podzbiorze). Możemy zatem zlogarytmować obie strony nierówności powyżej wykorzystując ten logarytm, co daje

$$ah(p) + ib = \log q \implies a \cdot \operatorname{re}(h(p)) = \operatorname{re}(\log q), a \cdot \operatorname{im}(h(p)) + b = \operatorname{im}(\log q).$$

Równanie ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$a = \frac{\operatorname{re}(\log q)}{\operatorname{re}(h(p))}, \quad b = \operatorname{im}(\log q) - a \cdot \operatorname{im}(h(p)).$$

Kryteria punktacji

Za rozwiązanie podzadań (a) i (b) można otrzymać maksymalnie po 5pt.

zad 4 e) $f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$, rozważmy $g(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$, $g: \mathbb{C} \setminus \{\text{pierwiastki 3-go stopnia z -1}\} \rightarrow \mathbb{C}$
 $g \in M(\mathbb{C})$

g ma 1 miejsce zerowe, jednoznaczne $g(1)=0$
 i 3 jednokrotne bieguny, pierwiastki 3-go stopnia z -1
 wszystkie te 4 punkty leżą wewnątrz $D(0,2)$

mammy więc γ -droga zamknięta, $g \in M(\mathbb{C})$, bieguny
 g nie leżą na γ^* , $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$ dla $z \in \mathbb{C}$

zatem z zasady argumentu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \sum_f - B_f = 1 - 3 = -2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 liczba zer f liczba biegunów f

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = -4\pi i$$

b) nie istnieje taka funkcja.

dla $\Gamma = f \circ \gamma$ mamy $\text{Ind}_\Gamma(0) = -4\pi i \neq 0$

logarytm z f nie mógłby istnieć tylko, gdyby dla każdego z dla z o $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$

$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = 0$, a tak nie jest

b) Nie istnieje, bo gdyby istniała $g = \log f$, to

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(x(a)) - \log f(x(0)) = 0, \text{ bo } \gamma \text{ to krzywa zamknięta.}$$

oraz $\gamma^* \subseteq \Omega$, bo ~~każdy~~ wierzchołki Q mają moduł równy 1.

Reguły punktacji: Za część a) i b) można dostać maksymalnie po 5pt.

Z 5

$$f(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad F(z) = \frac{F(z+1)}{z}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \quad \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) F(z) = \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \frac{F(z+1)}{z} = \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \frac{F(z+2)}{z(z+1)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \frac{F(z+k+1)}{z(z+1) \dots (z+k)} = \frac{F(1)}{(-k)(-k+1) \dots (-1)} = \frac{1}{k!} (-1)^k$$

F w ot. ~~z+k+1=1~~
jest hol. $\Rightarrow$ ciągłość

$$\sum \text{fw. Riemanna o osobl. usuw.} \quad \text{Res}(f, k) = \frac{1}{k!} (-1)^k$$

Informacja: Niektórzy z Państwa zauważyli, że jest to funkcja Gamma. To zadanie raczej nie sprawiało problemów.

KAMIL CIEBIERA ~~Prac. KATANAJSKA~~ Pr. KATANAJSKA
ZADANIE 6

Wzrost $h(z) = \frac{z}{z-2}$

Zauważmy, że $h(z+1) = \frac{z+1}{z-1}$, co z zadaniem 3 przekształca

$\operatorname{Re}(z) < 0$ na $D(0,1)$, więc oryginalne h p.

$h(0) = 0$, $h(2) = \infty$, więc h przekształca $\operatorname{Re}(z) = 1$ na

okrąg o środku w 0 (bo sym. $0 \leftrightarrow \infty$ są symetryczne),

co dodatkowo $h(1) = -1$ więc $h: \operatorname{Re}(z) < 1 \rightarrow D(0,1)$

$h \circ f: D(0,1) \rightarrow D(0,1)$ i w dodatku

$h \circ f(0) = 0$, więc dzięki lematu Schwarz'a

$$\left| \frac{f(z)}{f(z)-2} \right| \leq |z| \quad |f(z)| \leq |z| |f(z)-2| \leq |z| |f(z)| + 2|z|$$

$$|f(z)| (1-|z|) \leq 2|z|$$

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}$$

$$(h \circ f)' \cdot \left(1 + \frac{2}{f(z)-2} \right)' = - \frac{2f'(z)}{(f(z)-2)^2}$$

$$\left| - \frac{2f'(0)}{(f(0)-2)^2} \right| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} 1$$

$$\frac{2|f'(0)|}{4} \leq 1 \quad |f'(0)| \leq 2$$

Informacja o punktacji: Jeśli ktoś z Państwa zauważył, że chodzi o zastosowanie Lematu Schwarz'a do jakiejś modyfikacji funkcji f , dostawał za tę obserwację 0,5 pt.

Jeśli dodatkowo zauważył, że tą modyfikacją powinna być homografia, to bez wyliczenia tej homografii dostawał dodatkowo około 3 pt, w zależności od przejrzystości argumentów. Na ogół albo rozwiązanie kończyło się na tych obserwacjach, albo następowało pełne rozwiązanie.

Egzamin zerowy — Funkcje Analityczne

25.01.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Policz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Zadanie 2 (5 p.)

Zbadać liczbę zer (uwzględniając krotności) wielomianu $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 3 (15 p.)

Rozważmy funkcję

$$f(z) = \exp\left(\frac{10 + z^2}{100 - z^2}\right) \cdot \frac{(z + 1)(z - 3)}{(z - 2i)(z + 4i)}.$$

- (a) (5 p.) Znajdź wszystkie punkty osobliwe funkcji f i określ ich typ.
- (b) (5 p.) Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$ oraz rozważmy drogę zamkniętą $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$, daną wzorem $\gamma(t) = \frac{7}{2} \exp(4\pi i t)$. Wyznacz wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

- (c) (5 p.) Czy na obszarze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f)$?

Rozwiązanie:

- (a) Funkcja f jest holomorficzna na obszarze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2i, -4i, 10, -10\}$. W punktach $z = 2i, -4i$ mamy bieguny rzędu jeden. Aby określić typ osobliwości w nieskończoności, policzmy granicę

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = e^{-1},$$

zatem w nieskończoności funkcja f ma osobliwość usuwalną. Pozostaje nam tylko zbadać zachowanie funkcji f w otoczeniach punktów $z = \pm 10$.

Najpierw zauważmy, że

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) &= \exp\left(-1 + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10-z} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10+z}\right) = \\ &= e^{-1} \cdot \exp\left(\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10-z}\right) \cdot \exp\left(\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10+z}\right).\end{aligned}$$

Zatem w pewnym otoczeniu V punktu $z = 10$ funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(z) = \exp\left(\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10-z}\right) \cdot h(z),$$

gdzie funkcja h jest holomorficzna na tym otoczeniu. Na otoczeniu V mamy

$$\exp\left(\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10-z}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{11^k}{2^k(10-z)^k},$$

zatem, korzystając z charakteryzacji punktów osobliwych w terminach szeregu Laurenta, wnioskujemy, że funkcja $\exp\left(\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{10-z}\right)$ ma istotną osobliwość w punkcie $z = 10$. W konsekwencji funkcja f ma istotną osobliwość w punkcie $z = 10$.

Podobnie sprawdzamy, że funkcja f ma istotną osobliwość w punkcie $z = -10$.

- (b) Niech $Z(f)$ i $B(f)$ będą zbiorami zer i biegunów, odpowiednio, funkcji f wewnątrz dysku $D(0, \frac{7}{2})$. Na mocy zasady argumentu mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z(f)} \text{Ind}_{\gamma}(z)m(z) + \sum_{b \in B(f)} \text{Ind}_{\gamma}(z)m(z),$$

gdzie $m(z)$ oznacza krotność f w punkcie z . Mamy

$$Z(f) = \{-1, 3\}, \quad B(f) = \{2i\}.$$

Dla $z \in Z(f) \cup B(f)$ mamy

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = 2,$$

oraz

$$m(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z(f), \\ -1, & z \in B(f). \end{cases}$$

Podsumowując,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (2 + 2 - 2) = 4\pi i.$$

- (c) Gdyby na obszarze Ω istniała holomorficzna gałąź ϕ funkcji $\log(f)$, wówczas funkcja ϕ byłaby funkcją pierwotną funkcji $\frac{f'}{f}$. To by oznaczało, że dla dowolnej drogi zamkniętej γ w Ω mielibyśmy

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

W poprzednim punkcie znaleźliśmy przykład drogi zamkniętej w Ω , dla której powyższa całka nie znika. Zatem na obszarze Ω nie istnieje funkcja pierwotna funkcji $\frac{f'}{f}$. W konsekwencji na obszarze Ω nie istnieje holomorficzna gałąź funkcji f .

Zadanie 4 (10 p.)

Znajdź maksymalny (w sensie inkluzji) obszar, na którym całka

$$f(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt$$

definiuje funkcję holomorficzną.

Rozwiązanie:

Zacznijmy zatem od rozstrzygnięcia dla jakich $z \in \mathbb{C}$ istnieje całka

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt.$$

Powyższa całka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka

$$\int_{-\infty}^1 \left| \frac{e^{z^2 t}}{2-t} \right| dt = \int_{-\infty}^1 \frac{\exp(\operatorname{Re}(z^2)t)}{2-t} dt.$$

Zatem dla $\operatorname{Re}(z^2) \leq 0$ powyższa całka jest nieskończona, a dla $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$, powyższa całka jest skończona.

Zadanie można rozwiązać dwoma metodami: przy pomocy twierdzenia Weierstrassa lub twierdzenia Morery. Omówimy najpierw rozwiązanie korzystające z twierdzenia Weierstrassa.

Rozwiązanie nr 1 korzystające z twierdzenia Weierstrassa.

Korzystając z jednego z twierdzeń z wykładu stwierdzamy, że dla dowolnych $a < b < 2$ całka

$$\int_a^b \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt$$

definiuje funkcję holomorficzną na Ω . W szczególności, dla każdego $n \geq 1$ otrzymujemy funkcję holomorficzną na Ω daną przy pomocy całki

$$f_n(z) = \int_{-n}^1 \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt.$$

Dodatkowo, dla każdego $z \in \Omega$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt.$$

Na mocy twierdzenia Weierstrassa, jeśli na zbiorze otwartym $\Omega_0 \subset \Omega$ funkcje f_n zbiegają niemal jednostajnie, wówczas ich granica jest funkcją holomorficzną.

Ustalmy teraz dowolne $r > 0$. Jeśli $\operatorname{Re}(z^2) \geq r$, wówczas dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}_+$ takich, że $m > n$, mamy

$$\begin{aligned} \left| \int_{-m}^{-n} \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt \right| &\leq \int_{-m}^{-n} \frac{\exp(\operatorname{Re}(z^2)t)}{2-t} dt \leq \frac{1}{n+2} \int_{-m}^{-n} e^{rt} dt \\ &= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{r} \cdot (e^{-rn} - e^{-rm}) \leq \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-rn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd, dla dowolnego $\epsilon > 0$, istnieje $n > 0$, które będzie zależało od r , takie, że dla dowolnego $m > n$ mamy

$$|f_n(z) - f_m(z)| = \left| \int_{-m}^{-n} \frac{e^{z^2 t}}{2-t} dt \right| < \epsilon.$$

Zatem, ciąg funkcji f_n zbiega jednostajnie do swojej granicy na zbiorze $\{z: \operatorname{Re}(z^2) \geq r\}$. W konsekwencji, f_n zbiega niemal jednostajnie do swojej granicy na zbiorze Ω i granica jest funkcją holomorficzną na Ω .

Z racji tego, że w zadaniu było pytanie o maksymalny obszar, to jako odpowiedź można podać dowolną ze składowych spójnych zbioru Ω , tj.

$$\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z^2) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

$$\Omega_- = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z^2) > 0, \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Rozwiązanie nr 2 korzystające z twierdzenia Morery.

Przykładowe rozwiązanie zadania 1

Oczywiście rozważana w zadaniu funkcja $x \mapsto x \sin(\pi x)/(x^2+2x+5)$ nie jest na prostej rzeczywistej całkowalna w sensie Lebesgue'a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} \right| dx &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+0,25}^{n+0,75} |\sin(\pi x)| \cdot \left| \frac{x}{x^2 + 2x + 5} \right| dx \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+0,25}^{n+0,75} \frac{dx}{x+2+5x^{-1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{n+8} = \infty. \end{aligned}$$

Czynnik $\sin(\pi x)$ ma jednak na prostej rzeczywistej ograniczoną funkcję pierwotną $-\cos(\pi x)/\pi$, a czynnik $x/(x^2+2x+5)$ jest dla $|x| > 2024$ **monotonicznie** zbieżny do zera zarówno przy $x \rightarrow \infty$, jak i wtedy, gdy $x \rightarrow -\infty$, więc na mocy kryterium Dirichleta zbieżności całek niewłaściwych zbieżne są całki niewłaściwe

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx$$

oraz

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx,$$

czyli zbieżna jest całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx$$

i – w szczególności – spełniona jest równość

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Tę ostatnią granicę wystarczy więc wyznaczyć, by rozwiązać zadanie.

Uwaga: Granicę tę nazywa się wartością główną całki i oznacza się ją symbolem p.v. (skrót zwrotu *principal value*):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Przykład (ostrzeżenie): Wprawdzie

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0,$$

lecz nie istnieje granica

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b x dx,$$

gdyż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{n^2} x \, dx = (n^4 - n^2)/2 = \infty,$$

za to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n^2}^n x \, dx = (n^2 - n^4)/2 = -\infty.$$

Widać więc, że implikacja odwrotna do omówionej powyżej nie musi być prawdziwa: z istnienia wartości głównej całki niewłaściwej **nie wynika** zazwyczaj zbieżność tej całki – dlatego właśnie skorzystaliśmy ze szczególnych własności funkcji $x \mapsto x \sin(\pi x)/(x^2 + 2x + 5)$.

Obliczymy wartość główną badanej całki, korzystając z całkowania po półkolistym konturze $\Gamma_R = \gamma_R$ wyznaczonym przez gładkie krzywe $\eta_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $\gamma_R : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ określone, odpowiednio, wzorami

$$\eta_R(t) = t, \quad \gamma_R(t) = R e^{it}.$$

Ponieważ $\eta_R(R) = R = \gamma_R(0)$ oraz $\gamma_R(\pi) = -R = \eta_R(-R)$, to Γ_R jest krzywą zamkniętą kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$.

Łatwo sprawdzić, że $z^2 + 2z + 5 = (z - (2i - 1))(z + (2i + 1))$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Funkcja $z \mapsto f(z) = ze^{i\pi z}/(z^2 + 2z + 5)$ jest zatem na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{2i - 1, -2i - 1\}$ iloczynem funkcji holomorficzych, a więc jest na nim holomorficzna, skoro zaś w punktach $z = 2i - 1$ oraz $z = -2i - 1$ czynniki z oraz $e^{i\pi z}$ przyjmują wartości różne od zera, to obie te osobliwości punktowe są biegunami prostymi (tzn. jednokrotnymi, czyli rzędu jeden) owej funkcji. Gdy $R > \sqrt{5}$, to indeks krzywej zamkniętej Γ_R względem punktu $2i - 1$ jest równy 1, a jej indeks względem punktu $-2i - 1$ jest zerowy. Na mocy twierdzenia o residuach

$$\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} \, dz = 2\pi i \cdot \text{res}(f; 2i - 1).$$

Funkcja holomorficzna $g : \mathbb{C} \setminus \{-2i - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ określona wzorem

$$g(z) = ze^{i\pi z}/(z + 2i + 1)$$

rozwija się wokół punktu $2i - 1$ w szereg potęgowy:

$$g(z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n (z - (2i - 1))^n$$

dla pewnych liczb zespolonych $u_0, u_1, u_2, \dots$. Promień zbieżności tego szeregu to 4 (odległość między punktem $2i - 1$ a jedyną osobliwością punktową funkcji g , czyli punktem $-2i - 1$), ale w naszych rozważaniach

istotne jest tylko to, że promień ten jest większy od zera. Kładąc $z = 2i - 1$, otrzymujemy zatem równość

$$\begin{aligned} u_0 &= g(2i - 1) = (2i - 1)e^{i\pi(2i-1)} / ((2i - 1) + 2i + 1) = \frac{2i - 1}{4i} e^{2\pi i^2} e^{-\pi i} \\ &= \frac{2i + i^2}{4i} e^{-2\pi} \cdot (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = \frac{2 + i}{4} e^{-2\pi} \cdot (-1) = -\frac{e^{-2\pi}}{2} - i \frac{e^{-2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla wszystkich z z otwartego otoczenia punktu $1 - 2i$ mamy

$$f(z) = g(z) / (z - (2i - 1)) = u_0 (z - (2i - 1))^{-1} + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} (z - (2i - 1))^n,$$

to

$$\operatorname{res}(f; 2i - 1) = u_0 = -\frac{e^{-2\pi}}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{4}i,$$

toteż

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R]} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz + \int_{\gamma_R} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz &= \int_{\eta_R \vee \gamma_R} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz \\ &= \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f; 2i - 1) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{-2\pi}}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{4}i \right) \\ &= -i^2 \frac{\pi e^{-2\pi}}{2} - \pi e^{-2\pi} i = \frac{\pi e^{-2\pi}}{2} - \pi e^{-2\pi} i. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\pi > 0$, a

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2 + 2z + 5} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 5z^{-2}} = 0,$$

więc na mocy lematu Jordana

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z}{z^2 + 2z + 5} e^{i\pi z} dz = 0,$$

czyli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = \frac{\pi e^{-2\pi}}{2} - \pi e^{-2\pi} i.$$

To pozwala nam zakończyć rozwiązanie zadania:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int_{-R}^R \frac{x \operatorname{Im}(e^{i\pi x})}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-R}^R \operatorname{Im} \left(\frac{x e^{i\pi x}}{x^2 + 2x + 5} \right) dx \\ &= \operatorname{Im} \int_{-R}^R \frac{x e^{i\pi x}}{x^2 + 2x + 5} dx = \operatorname{Im} \int_{[-R, R]} \frac{z e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz, \end{aligned}$$

więc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx = \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} \frac{z e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = -\pi e^{-2\pi}.$$

Przykładowe rozwiązanie zadania 2

Oprócz wskazanego w zadaniu wielomianu P określonego wzorem $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ rozważmy wielomiany Q oraz R określone, odpowiednio, wzorami $Q(z) = 4z^5$ i $R(z) = 6z^2$. Funkcje wielomianowe P , Q oraz R są holomorficzne na całej płaszczyźnie zespolonej (czyli całkowite). Zadaćmy gładkie krzywe zamknięte $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ wzorami, odpowiednio,

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = 2e^{it},$$

skąd wynika, że $\gamma_1^* = \partial D(0, 1) = C(0, 1)$ oraz $\gamma_2^* = \partial D(0, 2) = C(0, 2)$, przy czym indeks krzywej γ_1 względem każdego punktu koła $D(0, 1)$ i indeks krzywej γ_2 względem każdego punktu koła $D(0, 2)$ równy jest 1, indeks krzywej γ_1 względem każdego punktu zbioru $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 1)$ i indeks krzywej γ_2 względem każdego punktu zbioru $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 2)$ równy jest zaś 0. Ponieważ każda liczba $z \in \gamma_1^*$ spełnia warunek $|z| = 1$, a więc także

$$|P(z) - R(z)| = |4z^5 + 1| \leq |4z^5| + |1| = 4|z|^5 + 1 = 5 < 6 = 6|z|^2 = |R(z)|,$$

czyli w szczególności $|P(z) - R(z)| < |R(z)|$, to na mocy twierdzenia Rouchégo wielomiany P i R mają w kole $D(0, 1)$ taką samą liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami). Skoro zatem wielomian R ma na płaszczyźnie zespolonej tylko jedno miejsce zerowe, i jest ono pierwiastkiem krotności dwa w punkcie $z = 0$ należącym do koła $D(0, 1)$, to również wielomian P ma w kole $D(0, 1)$ dokładnie dwa pierwiastki, licząc z krotnościami. Podobnie rozumując, zauważamy, że ponieważ każda liczba $z \in \gamma_2^*$ spełnia warunek $|z| = 2$, a więc także

$$\begin{aligned} |P(z) - Q(z)| &= |6z^2 + 1| \leq |6z^2| + |1| = 6|z|^2 + 1 = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25 \\ &< 128 = 4 \cdot 2^5 = 4|z|^5 = |4z^5| = |Q(z)|, \end{aligned}$$

czyli w szczególności $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$, to na mocy twierdzenia Rouchégo wielomiany P i Q mają w kole $D(0, 2)$ taką samą liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami). Skoro zatem wielomian Q ma na płaszczyźnie zespolonej tylko jedno miejsce zerowe, i jest ono pierwiastkiem krotności pięć w punkcie $z = 0$ należącym do koła $D(0, 2)$, to również wielomian P ma w kole $D(0, 2)$ dokładnie 5 pierwiastków, licząc z krotnościami. Stąd wnioskujemy, że w zbiorze

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\} = D(0, 2) \setminus D(0, 1)$$

wielomian P ma, licząc z krotnościami, dokładnie $5 - 2 = 3$ pierwiastki. Żaden z nich nie należy do okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, bo wykazaliśmy już, że gdy $|z| = 1$, to $|P(z) - R(z)| < |R(z)|$, a zatem $|P(z)| \geq |R(z)| - |P(z) - R(z)| > 0$, czyli $|P(z)| \neq 0$. Wielomian P ma więc trzy pierwiastki (licząc z krotnościami) w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 2. ✓

Zbadaj liczbę zer (uwzględniając krotności) wielomianu $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Rozw. Zasadnicze tw. algebry mówi, że funkcja $P(z)$ ma dokładnie 5 pierwiastków (licząc krotności). ↖ stopień wielomianu

Sprawdźmy dla $|z| < 1$.

Niech $f(z) = 6z^2$ oraz $g(z) = 4z^5 + 1$

Wtedy $P(z) = g(z) + f(z)$.

Skoro $f(z)$ ma 2 pierwiastki w $|z| < 1$, to

$P(z)$ również ma dwa pierwiastki w $|z| < 1$.

Patrzmy, co się dzieje dla $|z| = 1$, czyli na granicy obszaru.

$$|f(z)| = |6z^2| = 6$$

$$|g(z)| = |4z^5 + 1| \leq 4|z|^4 + 1 = 5$$

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)|$ dla $|z| = 1$, czyli funkcje

$P(z)$ oraz $f(z)$ mają tyle samo zer w

obszarze $|z| < 1$. NIE mają też pierwiastków na granicy, bo moduły NIE są równe.

Sprawdźmy dla $|z| < 2$.

dla $|z| = 2$: $6|z|^2 = 6 \cdot 4 = 24$

$4 \cdot |z|^5 = 4 \cdot 32 = 128$

Niech $f(z) = 4z^5$ oraz $g(z) = 6z^2 + 1$.

Wtedy $|f(z)| = 128 > |g(z)| \leq 6|z|^2 + 1 = 25$. Zatem wielomian $P(z)$ ma tyle samo pierwiastków ile funkcja $f(z)$, czyli 5 (na $|z| < 3$).

Ostatecznie, na obszarze $1 < |z| < 2$ mamy $5 - 2 = 3$ pierwiastki.

Zadanie 3. ✓

Rozważmy funkcję $f(z) = \exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) \cdot \frac{(z+1)(z-3)}{(z-2i)(z+4i)}$.

(a) Znajdź wszystkie punkty osobliwe funkcji $f(z)$ i określ ich typ.

Rozw. $z_1 = 2i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 10$, $z_4 = -10$ - zera mianowników oraz $z_5 = \infty$ (jest punktem osobliwym, o ile jest izolowana)

Weźmy z_1 .

Wtedy $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = \underbrace{\exp\left(\frac{10+(2i)^2}{100-(2i)^2}\right)}_{\text{const.} \neq 0} \cdot \underbrace{\infty}_{\text{bo licznik się nie zeruje}} = \infty \Rightarrow z_1 \text{ jest biegunem.}$ ↗ tu NIE ma z tym problemu

Weźmy z_2 , $\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) = \exp\left(\frac{10+(-4i)^2}{100-(-4i)^2}\right) \cdot \infty = \infty \Rightarrow z_2 \text{ jest biegunem.}$

Dla $z = z_{3,4}$: $\exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) = \exp\left(\frac{10+z^2}{(10-z)(10+z)}\right) =$

↗ rozkładamy na ułamki proste i w szereg!

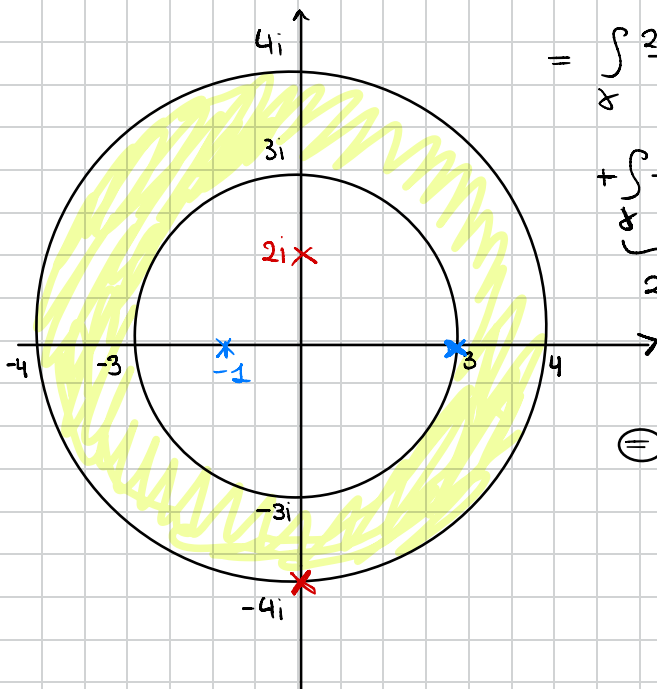
Jednocześnie, dla $z_5 = \infty$ mamy $\lim_{z \rightarrow z_5} f(z) = e^{-1} < \infty \Rightarrow z_5$ - osobliwość pozorna.

(b) Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$ oraz rozważmy drogę zamkniętą $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$, dając wzorem $\gamma(t) = \frac{7}{2} \exp(4\pi i t)$. Wyznacz wartość całki $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Rozw. Weźmy funkcję $f(z)$. Zauważmy, że $f(z) = \exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) \cdot \frac{(z+1)(z-3)}{(z-2i)(z+4i)}$. ↗ iloczyn pewnych funkcji

Z własności logarytmicznych tej całki otrzymujemy:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right)' dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z-3} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{z-2i} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{z+4i} dz =$$



$$= \int_{\gamma} \frac{2z(100-z^2) + 2z(10+z^2)}{(100-z^2)^2} dz$$

$g(z) \equiv 1$ - jest całkowita

$$+ \int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z-3} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{z-2i} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{z+4i} dz$$

$2 \cdot 2\pi i$
krywa robi 2 obroty wokół zera

0, bo $-4i$

leży poza krywą &

lindex jest zerowy)

$$\equiv \int_{\gamma} \frac{200z + 20z}{(100-z^2)^2} dz + 4\pi i$$

$$20 \int_{\gamma} \frac{11z}{(10-z^2)^2} dz + 4\pi i = 4\pi i$$

funkcja analityczna, więc całka jest zerowa

(c) Czy na obszarze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f)$?

Rozw. NIE

Zadanie 1. V

$$[f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega]$$

Pokaż, że następujące warunki są równoważne dla funkcji holomorficznej $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

a) dla każdej drogi zamkniętej $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ mamy $\int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = 0$

b) w Ω istnieje gałąź logarytmu funkcji f .

Zadanie 2. V

$$f(z) \neq 0$$

Założmy, że $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$ jest holomorficzna, oraz dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ mamy

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Pokaż, że wówczas istnieje w Ω gałąź pierwiastka n -tego stopnia funkcji f .

Zadanie 4.

Znajdź maksymalny (w sensie inkluzji) obszar, na którym całka $f(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2+t}}{2-t} dt$ definiuje funkcję holomorficzną.

Kiedy ta całka istnieje?

Powyższa całka istnieje $\Leftrightarrow$ gdy $\exists$ całka z modułu, czyli $\int_{-\infty}^1 \left| \frac{e^{z^2+t}}{2-t} \right| dt = \int_{-\infty}^1 \frac{\exp(\operatorname{Re}(z^2+t))}{2-t} dt =$

$$= \int_{-\infty}^1 \frac{e^{\operatorname{Re}(z^2)+t}}{2-t} dt$$

skoro $t < 0$, to dla $\operatorname{Re}(z^2) \leq 0$ powyższa całka jest nieskończona, a dla $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$ powyższa całka jest skończona

Dla dowolnych $a < b < 2$ całka $\int_a^b \frac{e^{z^2+t}}{2-t} dt$ definiuje funkcję holomorficzną na Ω .

Dla $\forall n \geq 0$ funkcja $f_n(z) = \int_{-\infty}^b \frac{e^{z^2+t}}{2-t} dt$ jest holomorficzna na Ω i jednocześnie mamy zbieżność punktową

$$(\forall z \in \Omega) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2+t}}{2-t} dt$$

Pokażemy, że zbieżność jest niemal jednostajna na zbiorze otwartym $\Omega_0 \subset \Omega$.

Wtedy ich granica będzie funkcją holomorficzną

Ustalmy $r > 0$. Niech $\operatorname{Re}(z^2) \geq r$. Wtedy $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$ ($m > n$) mamy

$$= \frac{1}{r(n+2)} (e^{-rn} - e^{-rm}) \leq \frac{1}{(n+2)} \cdot \frac{e^{-rn}}{r} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left| \int_{-m}^{-n} \frac{e^{z^2+t}}{2-t} dt \right| \leq \int_{-m}^{-n} \frac{e^{\operatorname{Re}(z^2)+t}}{2-t} dt \leq \frac{1}{n+2} \int_{-m}^{-n} e^t dt$$

bo $t < 0$

Wtedy $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$ (zależne od r) takie, że $\forall m > n$ mamy $|f_n(z) - f_m(z)| = \left| \int_n^m \frac{e^{2t}}{2-t} dt \right| < \varepsilon$.

Czyli na zbiorze $\{z: \operatorname{Re}(z^2) \geq r\}$ ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do "swojej granicy".

Wtedy mamy zbieżność niemal jednostajną na Ω , więc granica jest funkcją holomorfną.

Jako maksymalny obszar możemy podać dowolną składową spójności Ω_+ tzn. $\Omega_{\pm} = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z^2 > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zadanie 3(b)

Mamy dysk $D(0, \frac{7}{2})$.

Z zasady argumentu mamy $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z(f)} \operatorname{Ind}_{\gamma}(z) m(z) + \sum_{b \in B(f)} \operatorname{Ind}_{\gamma}(b) m(b)$

$Z(f) = \{i, 3i\}$, $B(f) = \{2i\}$

Dla $z \in Z(f) \cup B(f)$ mamy $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = 2$ oraz $m(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z(f) \\ -1, & z \in B(f) \end{cases}$

Wtedy $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (2 + 2 - 2) = 4\pi i$.

Egzamin — Funkcje Analityczne

07.02.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Udowodnij, że dla $a > 0$ zachodzi następująca równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\exp(\pi a) + \exp(-\pi a)}{\exp(\pi a) - \exp(-\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right).$$

Podpowiedź: Można skorzystać z twierdzenia o residuach.

Zadanie 2 (5 p.)

Uzasadnij, że wielomian $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ ma dokładnie dwa pierwiastki (uwzględniając krotności) w zbiorze $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 3 (15 p.)

Rozważmy funkcje

$$g(z) = \frac{z^2 + 2 \cos(z) - 2}{e^z - z^2 - 1}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^5}, \quad z \neq 0.$$

- (a) Uzasadnij, że funkcję g można przedłużyć do funkcji holomorficznego $\tilde{g}$ w otoczeniu zera.
- (b) Niech $\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ będzie rozwinięciem funkcji $\tilde{g}$ w szereg potęgowy w otoczeniu $z = 0$. Wyznacz współczynniki c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 .
Podpowiedź: Wygodniej będzie użyć rozwinięć Taylora.
- (c) Wyznacz część główną funkcji f wokół zera, rodzaj osobliwości w zerze oraz residuum w zerze.

Zadanie 4 (10 p.)

Rozważmy szereg

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

- (a) Dla każdego $N \in \mathbb{Z}_+$ rozważmy “ogon” powyższego szeregu

$$f_N(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

Uzasadnij, że szereg $f_N(z)$ definiuje funkcję holomorficzną na obszarze

$$\Omega_N = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -N\}.$$

- (b) Uzasadnij, że szereg f definiuje funkcję meromorficzną na $\mathbb{C}$ i wyznacz jej bieguny.
 (c) Rozważmy funkcję meromorficzną

$$g(z) = f''(z) - f'(z) + 2f(z).$$

Dla $k \in \mathbb{Z}_+$ definiujemy ciąg liczb zespolonych

$$a_k = \int_{S(0, k + \frac{1}{2})} g(z) \, dz,$$

gdzie $S(0, k + \frac{1}{2})$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku zero i promieniu $k + \frac{1}{2}$. Wyznacz granicę $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

FUNKCJE ANALITYCZNE

Egzamin 07.02.2024

Zadanie 2. Uzasadnij, że wielomian $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ ma dokładnie dwa pierwiastki (uwzględniając krotności) w zbiorze $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że skoro P ma współczynniki rzeczywiste dodatnie, nie zeruje się na półprostej $[0, \infty)$. Podobnie, dla każdego $y \geq 0$ mamy $P(iy) = (y^4 - 6y^2 + 8) + i(y^5 - 4y^3 + 3y) \neq 0$. Istotnie, gdyby $P(iy) = 0$, to mielibyśmy $y^4 - 6y^2 + 8 = y^4 - 4y^2 + 3 = 0$, skąd $2y^2 - 5 = 0$, jednak wtedy mielibyśmy $y^4 - 6y^2 + 8 = -\frac{3}{4} \neq 0$.

Weźmy $R > 0$ tak duże, aby wszystkie pierwiastki wielomianu P leżące w obszarze Ω spełniały nierówność $|z| < R$. Niech N będzie liczbą pierwiastków (z uwzględnieniem krotności) wielomianu P leżących w Ω . Niech Γ_R będzie konturem złożonym z: odcinka $[0, R]$, dodatnio zorientowanego łuku okręgu $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) oraz odcinka $[iR, 0]$. Na mocy zasady argumentu mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = N,$$

czyli $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = \Delta_{[0,R]}(\arg P(z)) + \Delta_{\gamma_R}(\arg P(z)) + \Delta_{[iR,0]}(\arg P(z)) = 2\pi N$, gdzie $\Delta_{\kappa}(\arg P(z))$ oznacza przyrost argumentu wartości $P(z)$ na krzywej κ . Obliczmy kolejno trzy składniki powyższej sumy.

1° Jest oczywiste, że $\Delta_{[0,R]}(\arg P(z)) = 0$, bo P przyjmuje wyłącznie wartości rzeczywiste na odcinku $[0, R]$.

2° Ponieważ $\frac{P(z)}{z^5} - 1 \rightarrow 0$ przy $|z| \rightarrow \infty$, mamy

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_R}(\arg P(z)) &= \Delta_{\gamma_R}(\arg z^5) + \Delta_{\gamma_R}\left(\arg\left(1 + \frac{z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8}{z^5}\right)\right) = \\ &= \frac{5}{2}\pi + o(1), \quad \text{przy } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

3° Obrazem odcinka $[iR, 0]$ przez wielomian P jest krzywa, która we współrzędnych kartezjańskich ma parametryzację

$$y \mapsto \mathbf{p}(y) = (u(y), v(y)) := (y^4 - 6y^2 + 8, y^5 - 4y^3 + 3y), \quad 0 \leq y \leq R,$$

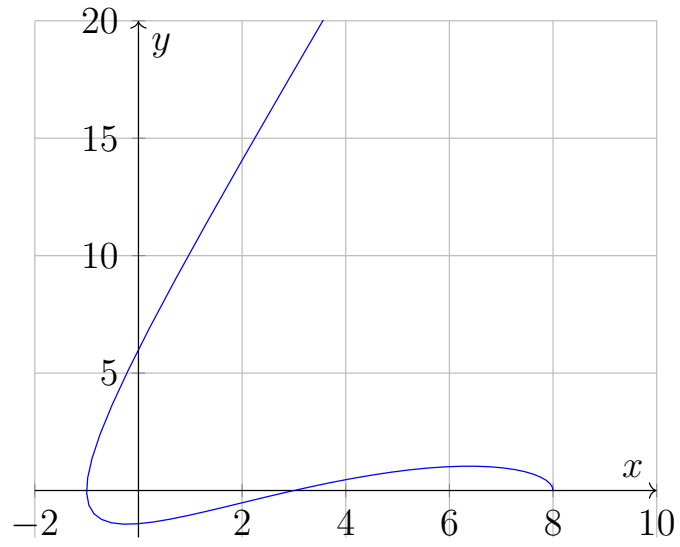
przy czym przyjmujemy tu orientację ujemną, tj. punktem początkowym jest $\mathbf{p}(R) = (R^4 - 6R^2 + 8, R^5 - 4R^3 + 3R)$, a punktem końcowym $\mathbf{p}(0) = (8, 0)$. Ponieważ $v(y) = y(y^2 - 1)(y^2 - 3)$, krzywa $\mathbf{p}$ przecina oś rzeczywistą w trzech punktach: w punkcie $\mathbf{p}(\sqrt{3}) = (-1, 0)$, w punkcie $\mathbf{p}(1) = (3, 0)$, a także w punkcie końcowym $\mathbf{p}(0) = (8, 0)$. Ponadto, dla $y \in (\sqrt{3}, R)$ punkty $\mathbf{p}(y)$ leżą w górnej półpłaszczyźnie, następnie dla $y \in (1, \sqrt{3})$ leżą one w dolnej półpłaszczyźnie i w końcu dla $y \in (0, 1)$ leżą znów w górnej półpłaszczyźnie. Mamy także $\operatorname{Arg} \mathbf{p}(0) = 0$ oraz

$$\operatorname{Arg} \mathbf{p}(R) = \arctg \frac{R^5 - 4R^3 + 3R}{R^4 - 6R^2 + 8} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

Obserwacje te pokazują, że

$$\Delta_{[iR,0]}(\arg P(z)) = 2\pi - \operatorname{Arg} \mathbf{p}(R) = \frac{3}{2}\pi + o(1) \quad \text{przy } R \rightarrow \infty.$$

Fragment krzywej $\mathbf{p}$ przedstawiony jest na poniższym rysunku.



W konsekwencji $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = 4\pi + o(1)$, czyli dla dostatecznie dużych $R > 0$ mamy $\Delta_{\Gamma_R}(\arg P(z)) = 4\pi$, skąd $N = 2$. ■

Szkic alternatywnego rozwiązania zadania 2

Oprócz wielomianu $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ rozważmy wielomian $Q = P + 1$ oraz rodzinę wielomianów $(W_t)_{t \in [0,1]}$ określoną wzorem $W_t = P + t$. Oczywiście $W_0 \equiv P$, a ponadto W_t zbiega do Q jednostajnie na $\mathbb{C}$, gdy $t \rightarrow 1^-$. Ponieważ

$$Q(z) = (z^2 + 3)(z^3 + z^2 + z + 3),$$

to Q ma dokładnie pięć jednokrotnych zer, z których trzy łatwo wskazać: $\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}i$ oraz ujemny pierwiastek wielomianu $z^3 + z^2 + z + 3$, którego istnienie wynika z twierdzenia Darboux. Dla wielomianu $z^3 + z^2 + z + 3$ bardzo łatwo odpowiedzieć na pytanie analogiczne do postawionego w treści zadania: ma on dokładnie jedno zero w zbiorze Ω , tj. w otwartej pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej. Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że $|z^3 + 3| > |z^2 + z|$ na półprostych $[0, \infty)$ oraz $[0, i\infty)$, a także wtedy, gdy $|z| > 2024$, co jest naprawdę proste do sprawdzenia, a następnie skorzystać z twierdzenia Rouchégo. Skoro zaś wszystkie współczynniki tego wielomianu są rzeczywiste, to ostatnie jego miejsce zerowe jest sprzężone do tego, które należy do Ω .

Dla żadnego $t \in [0, 1)$ wielomian W_t nie ma zer na półprostej $[0, \infty)$ ani na półprostej $[0, i\infty]$, ani też w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2024\}$. Sprawdza się to znów łatwo, prawie dokładnie tak samo, jak dla wielomianu $P \equiv W_0$. Stąd wynika – jak w dowodzie twierdzenia Rouchégo – że każdy z wielomianów W_t ma tyle samo zer w zbiorze Ω (licząc z krotnościami), więc aby zakończyć rozwiązanie zadania, wystarczy udowodnić, że dla pewnego t dostatecznie bliskiego jedności (ale wciąż mniejszego od 1) wielomian W_t ma w zbiorze Ω dokładnie dwa miejsca zerowe (licząc z krotnościami). Tu skorzystamy z twierdzenia Hurwitza i poczynionej wcześniej obserwacji o zbieżności jednostajnej. Trzy z miejsc zerowych wielomianu Q leżą poza domknięciem obszaru Ω , a jedno w tym obszarze. Trzeba więc tylko udowodnić, że zera wielomianów W_t zbiegające do $\sqrt{3}i$, gdy $t \rightarrow 1^-$, robią to z prawej strony osi urojonej dla t dostatecznie bliskich 1. To jest jednak dość oczywiste: gdy oznaczymy takie miejsce zerowe jako z_t , to

$$\frac{1-t}{z_t - \sqrt{3}i} = \frac{(W_t(z_t) + (1-t)) - 0}{z_t - \sqrt{3}i} = \frac{Q(z_t) - Q(\sqrt{3}i)}{z_t - \sqrt{3}i}$$

dąży do $Q'(\sqrt{3}i) = 12$, gdy $t \rightarrow 1^-$, więc $\operatorname{Re}(z_t)/(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 1/12 > 0$.

Zadanie trzecie z egzaminu

Rozwiązanie:

Mamy

$$z^2 + 2(\cos z - 1) = z^2 - 4 \sin^2 \frac{z}{2} = z^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{\frac{z^2}{4}} \right).$$

W mianowniku otrzymujemy:

$$e^z - z^2 - 1 = z \left(1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right).$$

Stąd

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0,$$

więc wystarczy położyć $\tilde{g}(0) = 0$. Niech $\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Wówczas

$$\tilde{g}(z)(e^z - z^2 - 1) = z^2 + 2 \cos z - 2.$$

Teraz uzyskujemy:

$$\begin{aligned} e^z - z^2 - 1 &= z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + o(z^4), \\ z^2 + 2 \cos z - 2 &= \frac{z^4}{12} + o(z^5). \end{aligned}$$

Widzimy od razu, że musi być $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ (porównanie współczynników przy niższych potęgach). Dalej piszemy $c_3 = \frac{1}{12}$ (porównanie współczynnika przy z^4) i $-\frac{1}{2}c_3 + c_4 = 0$, co daje $c_4 = \frac{1}{24}$.

Skoro licznik ma zero krotności trzy, a mianownik ma zero krotności pięć, to mamy do czynienia z biegunem drugiego rzędu, czyli część główna ma postać $\frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z}$. Zatem

$$c_{-2} = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z^3} = \frac{1}{12}.$$

Aby policzyć c_{-1} (czyli szukane residuum) rozważamy granicę:

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} z \left(f(z) - \frac{1}{12z^2} \right) = \frac{1}{24}.$$

Kryteria oceny:

1. Pierwszy podpunkt - 3 punkty.
2. Drugi podpunkt - 7 punktów.
3. Trzeci podpunkt - 5 punktów.

Przykładowe rozwiązanie zadania 4

(a) Na obszarze $\Omega_N = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -N\}$ funkcję f_N możemy przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji holomorficzych na Ω_N :

$$f_N(z) = \frac{(-1)^N}{N! \cdot (N+z)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)}.$$

Drugi składnik jest na obszarze Ω_N jednostajnie zbieżnym (czyli również niemal jednostajnie zbieżnym) szeregiem funkcji holomorficzych, więc na mocy twierdzenia Weierstrassa suma tego szeregu również jest funkcją holomorficzną na Ω_N ; aby zaś udowodnić tę jednostajną zbieżność, wystarczy zauważyć, że gdy $n \geq N+1$, a $z \in \Omega_N$, to

$$\operatorname{Re}(n+z) = n + \operatorname{Re} z \geq (N+1) - N = 1,$$

a zatem $|n+z| \geq |\operatorname{Re}(n+z)| \geq 1$, skąd już wynika, że

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{z \in \Omega_N} \left| \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot |n+z|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq e < \infty.$$

(b) Dla każdej dodatniej liczby całkowitej N możemy przedstawić funkcję f w postaci sumy

$$f(z) = f_N(z) + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)},$$

której pierwszy składnik jest funkcją holomorficzną na zbiorze Ω_N , co wykazaliśmy w punkcie (a), drugi zaś jest skończoną sumą funkcji holomorficzych na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, a więc również funkcją holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Stąd wynika, że funkcja f jest holomorficzną na obszarze $\Omega_N \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\})$ dla każdego N , zatem jest również holomorficzną na zbiorze

$$\begin{aligned} \bigcup_{N=1}^{\infty} (\Omega_N \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\})) &= \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N \right) \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}) \\ &= \mathbb{C} \cap (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}) = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \end{aligned}$$

Zbiór $\{0, -1, -2, \dots\}$ nie ma punktów skupienia, więc jego elementy są osobliwościami punktowymi funkcji f . Osobliwości te są biegunami prostymi, co łatwo udowodnić, przedstawiając dla $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ funkcję f w postaci sumy

$$f(z) = \frac{(-1)^m}{m! \cdot (m+z)} + f_{m+1}(z) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+z)},$$

której pierwszy składnik jest funkcją meromorficzną mającą w punkcie $-m$ biegun prosty, a pozostałe $m + 1$ składników to funkcje holomorficzne na otwartym otoczeniu tego punktu (przyda się punkt **(a)** oraz fakt, że $-m$ należy do otwartego zbioru Ω_{m+1}). Wynika stąd również, że $\text{Res}(f; -m) = (-1)^m/m!$, co przyda nam się w punkcie **(c)**. Funkcja f jest zatem meromorficzna na $\mathbb{C}$.

(c) Zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w treści zadania

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} g(z) dz = \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} (f''(z) - f'(z) + 2f(z)) dz \\ &= \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f''(z) dz - \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f'(z) dz + 2 \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f(z) dz \\ &= 0 + 0 + 2 \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f(z) dz = 2 \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f(z) dz; \end{aligned}$$

skorzystaliśmy tu z faktu, że funkcje f'' oraz f' mają funkcje pierwotne (odpowiednio f' oraz f) na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ zawierającym $S(0, k + \frac{1}{2})$. Z twierdzenia o residuach wnioskujemy więc, że

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \int_{S(0, k+\frac{1}{2})} f(z) dz = 2 \cdot 2\pi i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \text{ind}_{S(0, k+\frac{1}{2})}(-m) \text{Res}(f; -m) \\ &= 4\pi i \sum_{m=0}^k \text{Res}(f; -m) \stackrel{\text{(b)}}{=} 4\pi i \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 4\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = 4\pi e^{-1} i. \end{aligned}$$

Egzamin z Funkcji Analitycznych (6 II 2025)

1. Na zbiorze $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ określmy funkcję $\psi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\psi(z) = e^{iz} - 1$. Proszę udowodnić, że $|\psi(z)| \leq |z|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{H}_+$.

2. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Proszę wyznaczyć zbiór wszystkich liczb zespolonych w o tej własności, że funkcja $\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{C}$ określona wzorem $\varphi_w(z) = (1+z)^{-1}e^{wz} + (1-z)^{-1}$ ma na zbiorze V funkcję pierwotną.

3. Określmy $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Proszę wyznaczyć wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{z^{2025}}{z^{2025} - 1} dz.$$

4. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1\}$. Załóżmy, że funkcje $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ są holomorficzne (na zbiorze U), a ponadto dla każdego $z \in U$ spełniona jest równość $\cos(f(z)) = \cos(g(z))$. Proszę udowodnić, że

$$\forall z \in U \quad \sin(f(z)) = \sin(g(z)) \quad \text{lub} \quad \forall z \in U \quad \sin(f(z)) = -\sin(g(z)).$$

5. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a więc $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, a także niech $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Załóżmy, że funkcja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna (na zbiorze W), a jej obraz $f(W)$ zawiera się w dysku $\mathbb{D}$. Proszę udowodnić, że $f'(2) \in \mathbb{D}$. *Za wykazanie jedynie tego, że $f'(2) \in \overline{\mathbb{D}}$, czyli nieco słabszej tezy, można otrzymać do 9 punktów.*

Proszę o wyraźne podpisanie oddawanych do oceny rozwiązań. Rowiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnej kartce. Za każde z zadań można otrzymać do 12 punktów. W przypadku powoływania się na fakty z wykładu lub ćwiczeń należy podać ich dokładne sformułowania. Jeśli przywoływany fakt nie został udowodniony na wykładzie, należy również przedstawić przynajmniej w zarysie jego dowód (co nie powinno Państwu sprawić trudności, skoro już wcześniej widzieli go Państwo na ćwiczeniach).

Funkcje analityczne, semestr zimowy 2024/2025

Wzorcowe rozwiązanie zadania 1. z egzaminu

Michał Kotowski

Zadanie 1. Na zbiorze $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ określmy funkcję $\psi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\psi(z) = e^{iz} - 1$. Proszę udowodnić, że $|\psi(z)| \leq |z|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{H}_+$.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy funkcję $\varphi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{\psi(z)}{iz}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Rozwijając funkcję ψ w szereg potęgowy wokół 0 łatwo widzimy, że φ jest holomorficzną w $\mathbb{H}_+$ i ciągłą na $\overline{\mathbb{H}_+}$. Teza zadania jest równoważna stwierdzeniu, że $|\varphi(z)| \leq 1$ dla $z \in \mathbb{H}_+$.

Dla $R > 0$ rozważmy zbiór $K_R = \{z \in \mathbb{H}_+ : |z| \leq R\}$ (górna połówka dysku o promieniu R). Ponieważ K_R jest zwarty, a φ jest holomorficzną w jego wnętrzu i ciągłą na K_R , to z zasady maksimum wynika, że funkcja $|\varphi(z)|$ przyjmuje swoje maksimum na brzegu K_R . Brzeg K_R składa się z dwóch części – położonego na osi rzeczywistej odcinka $[-R, R]$ oraz półokręgu $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$. Przyjmijmy $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Mamy wówczas dla $z \in \gamma_R$:

$$|\varphi(z)|^2 = \left| \frac{e^{iz} - 1}{iz} \right|^2 = \frac{|e^{i(x+iy)} - 1|^2}{x^2 + y^2} = \frac{|e^{ix}e^{-y} - 1|^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{4}{R^2},$$

gdzie do oszacowania licznika użyliśmy nierówności trójkąta i tego, że $e^{-y} \leq 1$ dla $y \geq 0$. Dla dostatecznie dużych R (wystarczy wziąć $R > 2$) prawa strona nierówności jest mniejsza niż 1.

Do dowodu tezy zadania wystarczy zatem pokazać, że również dla $z \in [-R, R]$ mamy $|\varphi(z)| \geq 1$. Niech $z \in [-R, R]$. Mamy wówczas (biorąc $z = x$, $x \in \mathbb{R}$)

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{|e^{ix} - 1|^2}{x^2} = \frac{|\cos x + i \sin x - 1|^2}{x^2} = \frac{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x}{x^2} = \frac{2 - 2 \cos x}{x^2},$$

zatem nierówność, jaką mamy pokazać, jest równoważna nierówności $2 - 2 \cos x \leq x^2$. Ta z kolei jest równoważna znanej z Analizy I nierówności $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 1. Często popełnianym błędem było zastosowanie zasady maksimum bezpośrednio do (nieograniczonego) zbioru $\mathbb{H}_+$ i wnioskowanie, że moduł funkcji φ przyjmuje swoje

maksimum na osi rzeczywistej. Aby przekonać się, że tego typu rozumowanie jest niewystarczające, wystarczy zastąpić w treści zadania zbiór $\mathbb{H}_+$ zbiorem $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, tj. dolną półpłaszczyznę – teza jest wówczas fałszywa. W przypadku zbioru nieograniczonego sama zasada maksimum mówi jedynie tyle, że moduł rozważanej funkcji nie ma we wnętrzu zbioru maksimum lokalnego, natomiast nie pozwala wykluczyć sytuacji, że funkcja jest nieograniczona co do modułu.

Rozwiązanie wzorcowe zadania nr 2 z egzaminu

Zadanie 2. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Proszę wyznaczyć zbiór wszystkich liczb zespolonych w o tej własności, że funkcja $\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{C}$ określona wzorem $\varphi_w(z) = (1+z)^{-1}e^{wz} + (1-z)^{-1}$ ma na zbiorze V funkcję pierwotną.

Rozwiązanie: Sposób 1. Zauważmy że φ_w jest holomorficzna na zbiorze V , gdyż jej punkty osobliwe $z = 1$ i $z = -1$ nie leżą w V . Jak wiadomo z wykładu funkcja holomorficzna φ_w ma funkcję pierwotną wtedy i tylko wtedy gdy $\int_\gamma \varphi_w(z) dz = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej γ , która leży w V (strona 29 ze skryptu prof. Toruńczyka). Z twierdzenia o residuach

$$\int_\gamma \varphi_w(z) dz = \operatorname{res}_1(\varphi_w) \cdot \operatorname{Ind}(1, \gamma) + \operatorname{res}_{-1}(\varphi_w) \cdot \operatorname{Ind}(-1, \gamma) .$$

Zauważmy teraz, że oba indeksy $\operatorname{Ind}(1, \gamma)$ i $\operatorname{Ind}(-1, \gamma)$ będą sobie równe¹, wobec czego warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia funkcji pierwotnej jest

$$\operatorname{res}_1(\varphi_w) + \operatorname{res}_{-1}(\varphi_w) = 0 .$$

(Równoważny warunek, nieco trudniejszy do precyzyjnego sformułowania jest taki:

$$\int_{O(0,R)} \varphi_w(z) dz = 0 \quad \text{gdzie } R \text{ jest dowolnym promieniem większym niż } 1.$$

Powołując się na wyżej przywołane twierdzenie ze skryptu jasna jest konieczność tego warunku. Jego dostateczność wynika z faktu, że rozważany okrąg jest generatorem grupy homotopii zbioru V , tzn. każda pętla γ w V jest homotopijna bądź z rozważanym okręgiem, bądź z pętlą powstałą prze kilkukrotny obieg tego okręgu w jedną bądź drugą stronę. (Przy okazji przypominamy sobie homotopijną wersję tw. Cauchy'ego – strona 73 w skrypcie.))

Teraz pozostaje nam już tylko policzyć te residua. Ponieważ rozważane punkty osobliwe są biegunami jednokrotnymi możemy użyć wzorów

$$\operatorname{res}_1(\varphi_w) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \varphi_w(z) = -1$$

oraz

$$\operatorname{res}_{-1}(\varphi_w) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \varphi_w(z) = e^{-w} .$$

(Równoważnie całkę $\int_{O(0,R)} \varphi_w(z) dz$ liczymy ze wzoru Cauchy'ego:

$$\int_{O(0,R)} e^{wz} \cdot \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} dz = \int_{O(0,R)} e^{wz} \cdot \frac{1}{1+z} dz + \int_{O(0,R)} \frac{1}{1-z} dz = 2\pi i \cdot e^{-1 \cdot w} - 2\pi i .)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy warunek $e^w = 1$, co daje $w = 2k\pi i$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Dwa słowa o kryteriach oceniania: Dość wielu piszących wpadło na to, że istnienie funkcji pierwotnej ma związek z wartością całki $\int_{O(0,R)} \varphi_w(z) dz$. Problem stanowiło zazwyczaj precyzyjnie wyjaśnienie tego związku. Za luki w tym miejscu odbierałem do 3 punktów. W szczególności 3 punkty odbierałem gdy po otrzymaniu warunku koniecznego nie było (próby) dyskusji jego dostateczności.

¹Intuicyjnie ten fakt jest oczywisty – „widać”, że γ obiega tyle samo razy jeden i drugi punkt. Gdyby ktoś jednak potrzebował dokładniejszego uzasadnienia oto ono. Połączmy oba interesujące nas punkty -1 oraz 1 odcinkiem $\eta(t) := -1 \cdot (1-t) + 1 \cdot t$, gdzie $t \in [0, 1]$. Leży on poza zbiorem V , jest zatem rozłączny z γ i, co więcej, odległość krzywej γ i odcinka η (dwóch rozłącznych zbiorów zwartych) jest dodatnia. Z definicji $\operatorname{Ind}(\eta(t), \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \eta(t)} dz$ – przy ustalonym γ jest to ciągła funkcja zmiennej t . Z kolei wiemy, że wartości indeksu muszą być całkowite, a każda funkcja ciągła z odcinka w zbiór $\mathbb{Z}$ musi być stała. Wnioskujemy, że $\operatorname{Ind}(\eta(t), \gamma)$ nie zależy od t . Stąd, w szczególności, $\operatorname{Ind}(-1, \gamma) = \operatorname{Ind}(1, \gamma)$.

Sposób 2. Spróbujmy znaleźć rozwinięcie φ_w w szereg Laurenta. Zaczniemy od wyrazów $\frac{1}{1+z}$ oraz $\frac{1}{1-z}$. W tym celu użyjemy wzoru na sumę szeregu geometrycznego $1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a}$ dla $|a| < 1$. Na zbiorze V mamy $\frac{1}{|z|} < 1$ zatem

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{-1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}}.$$

Z kolei

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{-1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

Teraz

$$\varphi_w(z) = e^{wz} \cdot \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot z^k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}},$$

gdzie c_k liczymy używając iloczynu Cauchy'ego (na mocy twierdzenia Mertensa powyższy szereg będzie zbieżny na całym zbiorze V). Szukaną funkcję pierwotną można próbować wyznaczyć całkując powyższy szereg wyraz po wyrazie. Jak wiadomo, z^k ma na $\mathbb{C} \setminus 0$ (a więc i na V) funkcję pierwotną równą $\frac{1}{1+k} z^{k+1}$ dla wszystkich k poza $k = -1$. Wobec tego badana funkcja φ_w będzie miała funkcję pierwotną wtedy i tylko wtedy gdy współczynnik przy $\frac{1}{z}$ w powyższym rozwinięciu zniknie. Współczynnik ten wynosi

$$c_{-1} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot (-1)^n - 1 = e^{-w} - 1.$$

Skąd warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia funkcji pierwotnej jest $e^w = 1$.

Dwa słowa o kryteriach oceniania: Rozwiązania tego próbowało znacznie mniej osób. Część piszących próbowała rozwijać $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ bez refleksji na temat zbieżności tego szeregu w V . Podobnie niektórzy argumentowali że funkcja którą mamy jest analityczna, więc daje się scałkować wyraz po wyrazie, nie zauważając że to całowanie działa a priori tylko lokalnie w kole zbieżności. Część osób dostawała mniej lub bardziej poprawne rozwinięcie Laurenta, ale nie tłumaczyła po co – wtedy dawałem maksymalnie 4 punkty. Za w miarę udaną próbę rozwinięcia plus informację, że interesuje nas współczynnik przy $\frac{1}{z}$ tego rozwinięcia dawałem 6 lub więcej punktów.

Sposób 3. Pojawiła się jeszcze pojedyncza ciekawa próba rozwiązania – zamiast badać funkcję $\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{C}$ będziemy badać $\tilde{\varphi}_w(z) := \varphi_w(1/z)$ której dziedziną jest dysk jednostkowy. Ta zamiana zmiennych ma tę zaletę, że dostaliśmy funkcję z jedyną potencjalną osobliwością w $z = 0$. Pozostaje tylko zrozumieć związek między istnieniem funkcji pierwotnej dla φ_w a nową funkcją $\tilde{\varphi}_w$.

Zauważmy, że jeśli $F'_w(z) = \varphi_w(z)$ to $(F_w(1/z))' = -\frac{1}{z^2} F'_w(1/z) = -\frac{1}{z^2} \cdot \tilde{\varphi}_w(z)$. A więc, $\varphi_w(z)$ ma funkcję pierwotną wtedy i tylko wtedy gdy $-\frac{1}{z^2} \tilde{\varphi}_w(z)$ ma funkcję pierwotną.

(Inne uzasadnienie tego związku odwołujące się do podanej wcześniej charakteryzacji całkowej:

$$0 = \int_{\gamma} \varphi_w(z) dz \Leftrightarrow 0 = \int_{\tilde{\gamma}} -\frac{1}{s^2} \varphi_w(1/s) ds,$$

gdzie γ jest krzywą zamkniętą w V , $\tilde{\gamma}(z) = \gamma(1/z)$, a równoważność warunków wynika z zamiany zmiennych $s = \frac{1}{z}$.)

Koniec końców pytanie możemy sprowadzić do badania warunku $\text{res}_0(\frac{1}{z^2} \cdot \tilde{\varphi}_w(z)) = 0$.

Zadanie 3. Określmy funkcję $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Należy wyznaczyć wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{z^{2025}}{z^{2025} - 1} dz.$$

Rozwiązanie. Niech $n = 2025$. Funkcja $f(z) = \frac{z^n}{z^n - 1}$ jest holomorphyzna na zbiorze $\mathbb{C} \setminus S$, gdzie $S = \{z : z^n = 1\}$ oznacza zbiór pierwiastków z jedności stopnia n . Zgodnie z twierdzeniem o residuach, poszukiwana całka wynosi

$$\int_{\gamma} \frac{z^n}{z^n - 1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z=\xi^k} f(z),$$

gdzie $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. Pierwiastki z jedności stopnia n mają postać ξ^k dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Obrazem drogi γ jest okrąg $C(0, 2)$. Wszystkie pierwiastki ξ^k znajdują się wewnątrz dysku $D(0, 2)$. Indeks drogi γ względem każdego z pierwiastków ξ^k wynosi 1.

Pozostaje obliczyć residua $\operatorname{res}_{z=\xi^k} f(z)$ (wystarczy obliczyć ich sumę dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

I sposób: Zgodnie ze wzorem

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)},$$

gdzie g i h są holomorphyczne w otoczeniu punktu a (oprócz samego punktu a), $h(a) = 0$, a $h'(a) \neq 0$ (co zapewnia, że a jest zerem jednokrotnym funkcji h), mamy

$$\operatorname{res}_{z=\xi} \frac{z^n}{z^n - 1} = \frac{z^n}{nz^{n-1}} \Big|_{z=\xi} = \frac{\xi^n}{n\xi^{n-1}} = \frac{\xi}{n}.$$

Analogicznie, dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ mamy

$$\operatorname{res}_{z=\xi^k} \frac{z^n}{z^n - 1} = \frac{\xi^k}{n}.$$

Zatem

$$\int_{\gamma} \frac{z^n}{z^n - 1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi^k}{n} = 0,$$

gdyż suma wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n wynosi zero. (Wynika to z równości $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \xi^k)$ – wystarczy porównać współczynnik przy z^{n-1} . Drugi sposób polega na zsumowaniu wyrazów ciągu geometrycznego $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$.)

II sposób: Residuum funkcji f w punktach ξ^k można obliczyć bezpośrednio:

$$\operatorname{res}_{z=\xi^k} \frac{z^n}{z^n - 1} = \lim_{z \rightarrow \xi^k} (z - \xi^k) \frac{z^n}{\prod_{j=0}^{n-1} (z - \xi^j)} = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (\xi^k - \xi^j)} = \frac{1}{\prod_{j \neq k} \xi^k (1 - \xi^{j-k})} = \frac{\xi^k}{A},$$

gdzie

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k).$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{res}_{z=\xi^k} \frac{z^n}{z^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\xi^k}{A} = 0.$$

Uwaga. Wartość iloczynu A można łatwo obliczyć:

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \xi^k) \Big|_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 + z + \dots + z^{n-1}) = n.$$

Egzamin z Funkcji Analitycznych (6 II 2025)

4. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1\}$. Załóżmy, że funkcje $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ są holomorficzne (na zbiorze U), a ponadto dla każdego $z \in U$ spełniona jest równość $\cos(f(z)) = \cos(g(z))$. Proszę udowodnić, że

$$\forall_{z \in U} \sin(f(z)) = \sin(g(z)) \text{ lub } \forall_{z \in U} \sin(f(z)) = -\sin(g(z)).$$

Przykładowe rozwiązanie: Z udowodnionej na wykładzie tożsamości zwanej *jedyneką trygonometryczną* ($\forall_{u \in \mathbb{C}} \cos^2 u + \sin^2 u = 1$) i z założeń zadania wynika, że dla wszystkich $z \in U$ spełnione są równości

$$\begin{aligned} & (\sin(f(z)) - \sin(g(z))) (\sin(f(z)) + \sin(g(z))) = \sin^2(f(z)) - \sin^2(g(z)) \\ & = (1 - \cos^2(f(z))) - (1 - \cos^2(g(z))) = \cos^2(g(z)) - \cos^2(f(z)) = 0, \end{aligned}$$

a ponieważ iloczyn dwóch liczb zespolonych jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z nich jest zerem, to

$$\forall_{z \in U} \sin(f(z)) = \sin(g(z)) \text{ lub } \sin(f(z)) = -\sin(g(z)).$$

To oczywiście **nie** jest jeszcze teza, którą należało udowodnić. Zdefiniujmy dwa podzbiory zbioru liczb naturalnych, $A = \{n \in \mathbb{N} : \sin(f(1/n)) = \sin(g(1/n))\}$ oraz $B = \{n \in \mathbb{N} : \sin(f(1/n)) = -\sin(g(1/n))\}$; oczywiście odwrotności wszystkich liczb naturalnych należą do zbioru U . Stąd $A \cup B = \mathbb{N}$, więc A jest zbiorem nieskończonym lub B jest zbiorem nieskończonym.

Założmy, że A jest zbiorem nieskończonym. Funkcje $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ określone, odpowiednio, wzorami $\varphi(z) = \sin(f(z))$ oraz $\psi(z) = \sin(g(z))$ spełniają więc warunek zgodności $\varphi(z) = \psi(z)$ dla wszystkich z ze zbioru $\{1/n; n \in A\}$, stanowiącego podzbiór zbioru U i mającego punkt skupienia w zerze, które również jest elementem zbioru U . Ponadto funkcje te są holomorficzne, bo są złożeniami funkcji holomorficznych (sinusa z f oraz sinusa z g , odpowiednio). Jeśli więc udowodnimy, że U jest obszarem, to z zasady identyczności będziemy mogli wywnioskować, że $\forall_{z \in U} \varphi(z) = \psi(z)$, czyli $\forall_{z \in U} \sin(f(z)) = \sin(g(z))$, co zakończy dowód w tym przypadku.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku, gdy B jest zbiorem nieskończonym, tym razem otrzymując zgodność funkcji holomorficznych φ i $-\psi$ na zbiorze $\{1/n; n \in B\}$, zawartym w U i mającym punkt skupienia w $0 \in U$, skąd zasada identyczności pozwoli nam z kolei wywnioskować, że $\forall_{z \in U} \sin(f(z)) = -\sin(g(z))$, co zakończy dowód w tym drugim przypadku, jeśli tylko będziemy umieli uzasadnić, że U jest obszarem.

Odwzorowanie $U \ni z \mapsto \operatorname{Re}(z^2) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe, bo jest złożeniem ciągłych funkcji $\mathbb{C} \ni z \mapsto \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ oraz $U \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$. Stąd wynika, że zbiór U jest otwarty, ponieważ jest przeciwobrazem w tym odwzorowaniu półprostej $(-\infty, 1)$

stanowiącej otwarty podzbiór prostej rzeczywistej. Trzeba jeszcze udowodnić spójność zbioru U , by zakończyć rozwiązanie zadania. W tym celu pokażemy, że dowolny punkt $z \in U$ można połączyć z zerem zawartą w zbiorze U łamaną; stąd już wynikać będzie, że z i zero należą do tej samej składowej spójności łukowej zbioru U , a więc i do tej samej składowej spójności tego zbioru; z dowolności wyboru $z \in U$ wyniknie więc, że zbiór U ma dokładnie jedną składową spójności, a więc jest spójny. Załóżmy zatem, że $z = x + iy \in U$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, czyli $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$, więc również $\operatorname{Re}((tx + iy)^2) = t^2x^2 - y^2 < 1$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$, czyli odcinek o końcach $x + iy$ oraz iy zawiera się w U . Drugim kawałkiem szukanej przez nas łamanej jest odcinek o końcach iy oraz 0 ; zawiera się on w zbiorze U , ponieważ kwadrat każdej liczby zespolonej z osi urojonej $i\mathbb{R}$ jest nieododatnią liczbą rzeczywistą, a zatem jego część rzeczywista jest mniejsza od 1.

Uwaga: Poprawne rozwiązanie tego zadania musi przynajmniej raz skorzystać z tego, że zbiór U to $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1\}$, nie zaś np. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$. Jeśli bowiem określimy funkcje $F, G : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ wzorami

$$F(z) = z, G(z) = z, \text{ gdy } \operatorname{Re}(z^2) > 1 \text{ oraz } \operatorname{Re}(z) > 0$$

i

$$F(z) = z, G(z) = -z, \text{ gdy } \operatorname{Re}(z^2) > 1 \text{ oraz } \operatorname{Re}(z) < 0,$$

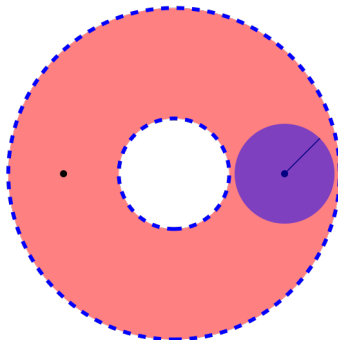
to F i G są holomorficzne, $\cos \circ F = \cos \circ G$ na zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$, a jednak nie jest prawdą ani to, że $\sin \circ F = \sin \circ G$ na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$, ani to, że $\sin \circ F = -\sin \circ G$ na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$. Rozwiązania, które nigdzie nie odwoływały się do postaci zbioru U w sposób, który umożliwiłby odróżnienie, czy jest to $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1\}$, czy raczej $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$, nie były więc poprawne.

Uwaga 2: Funkcje ciągłe F i G określone na zbiorze $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1\}$ wzorami $F(z) = \operatorname{Re}(z)$ oraz $G(z) = |\operatorname{Re}(z)|$ spełniają warunek

$$\forall_{z \in U} \cos(F(z)) = \cos(G(z)),$$

a jednak nie jest prawdą ani to, że $\forall_{z \in U} \sin(F(z)) = \sin(G(z))$, ani to, że $\forall_{z \in U} \sin(F(z)) = -\sin(G(z))$. Nie oznacza to oczywiście, że zadanie było błędne – funkcje te nie są bowiem holomorficzne. Pokazuje to wszelako, że rozwiązania zadania, które nigdzie nie korzystały z holomorficzności funkcji f i g w inny sposób niż poprzez wywnioskowanie ich ciągłości, nie mogły być poprawne.

5. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a więc $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, a także niech $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Załóżmy, że funkcja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną (na zbiorze W), a jej obraz $f(W)$ zawiera się w dysku $\mathbb{D}$. Proszę udowodnić, że $f'(2) \in \mathbb{D}$. *Za wykazanie jedynie tego, że $f'(2) \in \overline{\mathbb{D}}$, czyli nieco słabszej tezy, można otrzymać do 9 punktów.*



Najpierw udowodnimy tezę w szczególnym przypadku, kiedy $f(2) = 0$. Rozważmy funkcję $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ daną przez

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z-2} & z \neq 2 \\ f'(2) & z = 2 \end{cases}$$

Łatwo pokazać że funkcja g jest funkcją analityczną. Niech $0 < r < 1$. Na okręgu $C(2, r)$ zachodzi

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r}$$

Z zasady maksimum, taka nierówność zachodzi na każdym dysku $\overline{D(2, r)}$. Przechodząc do granicy $r \rightarrow 1$, otrzymujemy $|g(z)| \leq 1$, w szczególności $|f'(2)| \leq 1$. Jednakże, jeśli $|f'(2)| = 1$, to $|g(z)|$ osiąga maksimum w punkcie wewnątrz, co oznacza że $g(z)$ jest funkcją stałą na $D(2, 1)$, równą jakiemuś $c \in \mathbb{C}$, dla którego $|c| = 1$. Czyli $f(z) = c(z-2)$ na $D(2, 1)$. Z zasady identyczności, $f(z) = c(z-2)$ na W . Ale to oznacza że $|f(-2)| = |c(-4)| = 4$, co przeczy założeniu $f(W) \subset D(0, 1)$.

Teraz załóżmy że $f(2) \neq 0$. Dla $p \in D(0, 1)$, istnieje przekształcenie Blaschkego $b_p : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$

$$b_p(z) = \frac{z-p}{1-\overline{p}z}$$

Niech $h : W \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dane przez

$$h(z) = \frac{f(z) - f(2)}{1 - \overline{f(2)}f(z)}$$

Ponieważ $|f(2)| < 1$, i $|f(z)| < 1$, więc $|h(z)| < 1$ (czyli $h : W \rightarrow D(0, 1)$) oraz $h(2) = 0$. Z powyższego argumentu wnioskujemy że $|h'(2)| < 1$. Różniczkując h otrzymujemy

$$h'(2) = \frac{f'(2)}{1 - |f(2)|^2}$$

Czyli $|f'(2)| < |h'(2)| < 1$.

1. Na zbiorze $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ określmy funkcję $\psi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\psi(z) = e^{iz} - 1$. Proszę udowodnić, że $|\psi(z)| \leq |z|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{H}_+$.

Przykładowe rozwiązanie: Dla $z \in \mathbb{H}_+$ niech $x = \operatorname{Re}(z)$ oraz $y = \operatorname{Im}(z)$. Wówczas $y > 0$, a także

$$\begin{aligned} |\psi(z)|^2 &= |e^{iz} - 1|^2 = |e^{-y+ix} - 1|^2 = |e^{-y}e^{ix} - 1|^2 = |e^{-y}(\cos x + i \sin x) - 1|^2 \\ &= |(e^{-y} \cos x - 1) + i \cdot e^{-y} \sin x|^2 = (e^{-y} \cos x - 1)^2 + (e^{-y} \sin x)^2 \\ &= e^{-2y} \cos^2 x - 2e^{-y} \cos x + 1 + e^{-2y} \sin^2 x = e^{-2y} \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2e^{-y} \cos x + 1 \\ &= e^{-2y} - 2e^{-y} \cos x + 1 = (1 - 2e^{-y} + e^{-2y}) + 2e^{-y}(1 - \cos x) \\ &= (1 - e^{-y})^2 + 2e^{-y} \cdot 2 \sin^2(x/2) = (1 - e^{-y})^2 + e^{-y} \cdot (2 \cdot |\sin(x/2)|)^2 \\ &\leq y^2 + e^{-y}(2|x/2|)^2 \leq y^2 + |x|^2 = x^2 + y^2 = |x + iy|^2 = |z|^2, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania, przy czym skorzystaliśmy tu z prostych faktów znanych Państwu z Analizy Matematycznej I: $1 - y \leq e^{-y} \leq 1$, skąd wynika, że $1 - e^{-y} \in [0, y]$, więc $(1 - e^{-y})^2 \in [0, y^2]$; ponadto $|\sin t| \leq |t|$ dla dowolnego t rzeczywistego, czego używamy tu dla $t = x/2$.

Alternatywne rozwiązanie: Zdefiniujmy funkcję $f_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $f_z(s) = e^{isz}$ i zauważmy, że dla każdego $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f'_z(s)| &= |ize^{isz}| = |i| \cdot |z| \cdot |e^{isz}| = 1 \cdot |z| \cdot e^{\operatorname{Re}(isz)} \\ &= |z| \cdot e^{-\operatorname{Im}(sz)} = |z| \leq |z| \cdot e^0 = |z| \cdot 1 = |z|, \end{aligned}$$

– skorzystaliśmy tu z tego, że $\forall_{u \in \mathbb{C}} |e^u| = e^{\operatorname{Re}(u)}$ oraz $\operatorname{Re}(iu) = -\operatorname{Im}(u)$, a także z tego, że ponieważ $s \in [0, 1]$, z zaś ma dodatnią część urojoną, to $\operatorname{Im}(sz) \geq 0$. Teraz wystarczy zauważyć, że

$$\psi(z) = f_z(1) - f_z(0) = \int_0^1 f'_z(s) ds,$$

więc na mocy całkowej nierówności trójkąta

$$|\psi(z)| = \left| \int_0^1 f'_z(s) ds \right| \leq \int_0^1 |f'_z(s)| ds \leq \int_0^1 |z| ds = |z| \int_0^1 ds = |z| \cdot 1 = |z|,$$

co należało udowodnić.

Uwaga: Można również użyć nierówności trójkąta dla całki krzywoliniowej:

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &= |\psi(z) - 0| = |\psi(z) - \psi(0)| = \left| \int_{[0,z]} \psi'(w) dw \right| \leq L([0, z]) \cdot \sup_{w \in [0, z]} |\psi'(w)| \\ &= |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} |ie^{iw}| = |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} |i| \cdot |e^{iw}| = |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} |e^{iw}| = |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} e^{\operatorname{Re}(iw)} \\ &= |z| \cdot \sup_{w \in [0, z]} e^{-\operatorname{Im}(w)} \leq |z| \cdot e^0 = |z| \cdot 1 = |z|; \end{aligned}$$

skorzystaliśmy tu z tego, że $(0, z] \subseteq \mathbb{H}_+$, ponieważ $z \in \mathbb{H}_+$.

5. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a więc $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, a także niech $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Załóżmy, że funkcja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzną (na zbiorze W), a jej obraz $f(W)$ zawiera się w dysku $\mathbb{D}$. Proszę udowodnić, że $f'(2) \in \mathbb{D}$. *Za wykazanie jedynie tego, że $f'(2) \in \overline{\mathbb{D}}$, czyli nieco słabszej tezy, można otrzymać do 9 punktów.*

Przykładowe rozwiązanie prostszej części zadania (tej za 9 punktów):

Z nierówności trójkąta wynika, że jeśli $|z - 2| < 1$, to $1 < |z| < 3$, a zatem $D(2, 1) \subset W$. Dla $r \in (0, 1)$ rozważmy drogę zamkniętą $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow D(2, 1)$ określoną wzorem $\gamma_r(t) = 2 + re^{it}$. Z udowodnionego na wykładzie wzoru całkowego Cauchy'ego dla pochodnej wynika, że

$$f'(2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-2)^2} dw,$$

więc na mocy całkowej nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} |f'(2)| &\leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma_r) \cdot \sup_{w \in \partial D(2,r)} \left| \frac{f(w)}{(w-2)^2} \right| = \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \sup_{w \in \mathbb{C}: |w-2|=r} \frac{|f(w)|}{|w-2|^2} \\ &= r \cdot \sup_{w \in \mathbb{C}: |w-2|=r} \frac{|f(w)|}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \sup_{w \in \mathbb{C}: |w-2|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \cdot \sup_{w \in W} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że $f(W) \subset \mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{D}}$, czyli $\sup_{w \in W} |f(w)| \leq 1$. Skoro zaś $|f'(2)| \leq 1/r$ dla każdego $r \in (0, 1)$, to $|f'(2)| \leq \inf_{r \in (0,1)} 1/r = 1$, więc $f'(2) \in \overline{\mathbb{D}}$, co należało udowodnić.

Egzamin poprawkowy z Funkcji Analitycznych (19 II 2025)

1. Niech $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ i niech $\psi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorficzną (na $\mathbb{H}_+$), że $\psi(i) = i$ oraz $\psi(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{H}_+$, tzn. $\forall z \in \mathbb{H}_+ \quad \psi(z) \in \mathbb{H}_+$. Proszę udowodnić, że $|\psi'(i)| \leq 2025$.

Przykładowe rozwiązanie: Ponieważ dla każdej liczby zespolonej u prawdziwa jest równość $|e^{iu}| = e^{-\operatorname{Im}(u)}$ – a ponadto dla każdego $z \in \mathbb{H}_+$ również $\psi(z) \in \mathbb{H}_+$, czyli $\operatorname{Im}(\psi(z)) > 0$ – to funkcja $f : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowana wzorem $f(z) = e^{i\psi(z)}$ spełnia warunek $|f(z)| = e^{-\operatorname{Im}(\psi(z))} < 1$ dla wszystkich $z \in \mathbb{H}_+$. Rozważmy drogę zamkniętą $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}_+$ określoną wzorem $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$ (obiegającą w kierunku naturalnym, tzn. przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, okrąg o środku w punkcie i oraz promieniu $1/2$, czyli o obwodzie π , zawierającą się wraz z całym dyskiem domkniętym $\overline{D}(i, 1/2)$ w półpłaszczyźnie $\mathbb{H}_+$). Funkcja f jest holomorficzną na $\mathbb{H}_+$, bo jest złożeniem funkcji holomorficzych $u \mapsto e^{iu}$ oraz ψ ; możemy zatem odczytać jej pochodną w punkcie $z_0 = i$ ze wzoru całkowego Cauchy’ego dla pierwszej pochodnej,

$$f'(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz,$$

następnie zaś zastosować całkową nierówność trójkąta, by otrzymać oszacowanie

$$\begin{aligned} |f'(i)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(\gamma) \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - i)^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} \frac{|f(\gamma(t))|}{|e^{it}/2|^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sup_{t \in [0, 2\pi]} \frac{|f(\gamma(t))|}{1/4} = 2 \cdot \sup_{z \in C(i, 1/2)} |f(z)| \leq 2 \sup_{z \in \mathbb{H}_+} |f(z)| \leq 2. \end{aligned}$$

Wiemy również, że dla każdego $z \in \mathbb{H}_+$

$$f'(z) = \frac{d}{dz} e^{i\psi(z)} = i\psi'(z) \cdot e^{i\psi(z)},$$

więc w szczególności $f'(i) = i\psi'(i)e^{i\psi(i)} = i\psi'(i)e^{i \cdot i} = i\psi'(i)e^{-1}$, a co za tym idzie, $|f'(i)| = |i| \cdot |\psi'(i)| \cdot |e^{-1}| = e^{-1} \cdot |\psi'(i)|$. Korzystając z wcześniej udowodnionego oszacowania, otrzymujemy stąd

$$|\psi'(i)| = e \cdot |f'(i)| \leq e \cdot 2 < 2025,$$

co należało udowodnić.

Uwaga: Warto zastanowić się, dlaczego w powyższym rozwiązaniu stosowaliśmy wzór całkowy Cauchy’ego do funkcji f zamiast do funkcji ψ , której dotyczy treść zadania. Powodem było to, że założenia zadania pozwalają wprowadzić (np. używając homografii przeprowadzającej $\mathbb{H}_+$ na dysk jednostkowy, punkt i natomiast na zero, a następnie stosując lemat Schwarz’a) oszacować z góry $\sup_{z \in C(i, 1/2)} |\psi(z)|$ przez stałą wystarczająco małą, by zastosowanie całkowej nierówności trójkąta pozwoliło zakończyć rozwiązanie zadania również tą drugą metodą, ale jest to wyraźnie żmudniejsze niż powyższe rachunki.

Omawiane zadanie można również rozwiązać, korzystając z następującego faktu dla $U = \mathbb{H}_+$ oraz $z_0 = i$.

Fakt: Załóżmy, że U jest otwartym, **ale nie gęstym**, podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Niech $z_0 \in U$ i niech $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorficzną (na U), że $\psi(z_0) = z_0$ oraz $\psi(U) \subseteq U$, tzn. $\forall_{z \in U} \psi(z) \in U$. Wtedy $|\psi'(z_0)| \leq 1$.

Uwaga: Przykład $\psi(z) = z^2$, $z_0 = 1$ oraz $U = \mathbb{C}$ lub $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pokazuje, że powyższy fakt po usunięciu z niego założenia zapisanego pogrubionym drukiem przestaje być prawdziwy.

Dowód Faktu: Skoro U jest zbiorem otwartym, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $\overline{D}(z_0, \varepsilon) \subseteq U$; ponieważ zaś U nie jest gęsty w $\mathbb{C}$, to istnieją takie $z_1 \in \mathbb{C} \setminus U$ oraz $\delta > 0$, że $D(z_1, \delta) \cap U = \emptyset$. Zdefiniujemy rekurencyjnie na zbiorze U ciąg funkcji $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ wzorami $\psi_1 = \psi$ oraz $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$ dla $n \geq 1$; występujące w tej definicji złożenie funkcji jest dobrze określone, gdyż $\psi(U) \subseteq U$. Rzecz jasna $\psi_2 = \psi \circ \psi$, $\psi_3 = \psi \circ \psi \circ \psi$ itd. Korzystając z indukcji naturalnej względem parametru n , łatwo dowodzimy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n funkcja ψ_n jest holomorficzną na U i przyjmuje wartości tylko w zbiorze U , a ponadto $\psi_n(z_0) = z_0$. Zauważmy, że ponieważ dla każdego $z \in U$

$$\psi'_{n+1}(z) = \frac{d}{dz} \psi_n(\psi(z)) = \psi'_n(\psi(z)) \cdot \psi'(z),$$

to w szczególności $\psi'_{n+1}(z_0) = \psi'_n(z_0) \cdot \psi'(z_0)$, więc – znowu korzystając z prostej indukcji naturalnej względem n – wnioskujemy stąd, że $\psi'_n(z_0) = (\psi'(z_0))^n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . Określmy funkcję $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $f_n(z) = 1/(\psi_n(z) - z_1)$. Oczywiście f_n jest holomorficzną na U , a ponadto $|f_n(z)| \leq 1/\text{dist}(z_1, \psi_n(U)) \leq 1/\text{dist}(z_1, U) \leq 1/\delta$ dla każdego $z \in U$. Wzór całkowy Cauchy'ego na okręgu $C(z_0, \varepsilon)$ na pierwszą pochodną funkcji f_n ,

$$f'_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, \varepsilon)} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

po zastosowaniu całkowej nierówności trójkąta prowadzi do oszacowania

$$\begin{aligned} |f'_n(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(C(z_0, \varepsilon)) \cdot \sup_{z \in C(z_0, \varepsilon)} \left| \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^2} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot \sup_{z \in C(z_0, \varepsilon)} \frac{|f_n(z)|}{|z - z_0|^2} = \varepsilon \cdot \frac{\sup_{z \in C(z_0, \varepsilon)} |f_n(z)|}{\varepsilon^2} \leq \frac{1/\delta}{\varepsilon} = \frac{1}{\delta\varepsilon}, \end{aligned}$$

a ponieważ

$$f'_n(z_0) = \frac{d}{dz} \frac{1}{\psi_n(z) - z_1} \Big|_{z=z_0} = - \frac{\psi'_n(z_0)}{(\psi_n(z_0) - z_1)^2} = - \frac{(\psi'(z_0))^n}{(z_0 - z_1)^2},$$

to $|f'_n(z_0)| = |\psi'(z_0)|^n / |z_0 - z_1|^2$, co wraz z tym oszacowaniem dowodzi, że

$$|\psi'(z_0)| \leq \sqrt[n]{|z_0 - z_1|^2 \delta^{-1} \varepsilon^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

skąd wynika już teza Faktu.

FUNKCJE ANALITYCZNE — EGZAMIN POPRAWKOWY

Zadanie 1. Niech $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ i niech $\psi: \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorficzną (na $\mathbb{H}_+$), że $\psi(i) = i$ oraz $\psi(\mathbb{H}_+) \subset \mathbb{H}_+$, tzn. dla każdego $z \in \mathbb{H}_+$, $\psi(z) \in \mathbb{H}_+$. Proszę udowodnić, że $|\psi'(i)| \leq 1$.

Powyższe zadanie jest typowym przykładem zadania, w którym można skorzystać z Lematu Schwarza. Jednak w pracach, które sprawdzałem, pojawiło się jeszcze jedno rozwiązanie, które nie korzysta w sposób jawny z Lematu Schwarza, a odwołuje się do nierówności Cauchy'ego. Z tego względu omówię dwa rozwiązania tego zadania.

Rozwiązanie nr 1. Zaczniemy zatem od przypomnienia Lematu Schwarza.

Lemat 1 (Schwarza). Niech

$$\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Założmy, że mamy funkcję analityczną $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| < 1$, tj. $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Jeśli $f(0) = 0$, wówczas dla każdego $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$ oraz $|f'(0)| \leq 1$.

Górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}_+$ możemy przekształcić konforemnie na dysk jednostkowy przy pomocy homografii $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Dodatkowo, homografia h spełnia $h(i) = 0$. Rozważmy funkcję $g = h \circ \psi \circ h^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Zauważmy, że $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ oraz

$$g(0) = h(\psi(h^{-1}(0))) = h(\psi(i)) = h(i) = 0.$$

Zatem, funkcja g spełnia założenia Lematu Schwarza. W konsekwencji, mamy

$$|g'(0)| \leq 1.$$

Z drugiej strony:

$$g'(0) = h'(\psi(h^{-1}(0))) \cdot \psi'(h^{-1}(0)) \cdot (h^{-1})'(0) = h'(i) \cdot \psi'(i) \cdot (h^{-1})'(0).$$

Korzystając z własności pochodnych mamy

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(i)},$$

zatem

$$g'(0) = \psi'(0).$$

To pokazuje, że

$$|\psi'(0)| = |g'(0)| \leq 1,$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie nr 2. Niech $\psi: \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją, która ma własności jak w treści zadania. Rozważmy też homografię $h = \frac{z-i}{z+i}$, która przekształca obszar $\mathbb{H}_+$ na dysk jednostkowy $\mathbb{D}$ w taki sposób, że $h(i) = 0$. Rozważmy teraz funkcję $g = h \circ \psi$. Wówczas $g(\mathbb{H}_+) \subset \mathbb{D}$, tj., dla każdego $z \in \mathbb{H}_+$ mamy $|g(z)| < 1$, oraz $g(i) = 0$. Dodatkowo,

$$g'(i) = h'(\psi(i)) \cdot \psi'(i) = h'(i) \cdot \psi'(i).$$

Mamy

$$h'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2} \quad \text{oraz} \quad |h'(i)| = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$(1) \quad |\psi'(i)| = 2|g'(i)|.$$

Ustalmy $0 < R < 1$. Zauważmy, że $D(i, R) \subset \mathbb{H}_+$. Stosując nierówność Cauchy'ego do funkcji g na dysku $D(i, R)$ otrzymamy

$$|g'(i)| = \frac{1}{R} \cdot \sup_{|z-i| < R} |g(z)| \leq \frac{1}{R}.$$

Przechodząc do granicy $R \rightarrow 1^-$ otrzymamy

$$|g'(i)| \leq 1.$$

Korzystając z (1) otrzymamy

$$|\psi'(i)| = 2|g'(i)| \leq 2.$$

Niektórzy próbowali argumentować następująco: skoro $|g(i)| = 1$, to istnieje $0 < R < 1$ takie, że

$$(2) \quad \sup_{|z-i| \leq R} |\psi(z)| \leq 2.$$

Wówczas, korzystając z nierówności Cauchy'ego, otrzymujemy

$$|\psi'(i)| \leq \frac{2}{R}.$$

W tym przypadku dostajemy jakieś oszacowanie na $|\psi'(i)|$, ale trzeba jeszcze jakoś uargumentować, że możemy wybrać $0 < R < 1$ takie, żeby

$$\frac{2}{R} \leq 2025.$$

Niestety, pomimo tego, że wiele osób próbowało argumentować w ten sposób, ta metoda prowadziła donikąd.

Funkcje analityczne, semestr zimowy 2024/2025

Wzorcowe rozwiązanie zadania 2. z egzaminu poprawkowego

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Proszę rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, że $\sup_{t \in (-1,1)} |f(t)| < \frac{1}{2025}$, ale $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| > 2025$. Odpowiedź należy ściśle uzasadnić.

Rozwiązanie. Funkcja taka istnieje – warunki zadania spełnia na przykład

$$f(z) = \frac{1}{2026} e^{iCz},$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest odpowiednio dobraną stałą.

Istotnie, jeśli $t \in (-1, 1)$, to mamy

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{2026} e^{iCt} \right| = \frac{1}{2026} |e^{iCt}| = \frac{1}{2026} < \frac{1}{2025}.$$

Z kolei dla $z = -\frac{i}{2} \in \mathbb{D}$ mamy

$$\left| f\left(-\frac{i}{2}\right) \right| = \frac{1}{2026} \left| e^{iC(-\frac{i}{2})} \right| = \frac{1}{2026} e^{\frac{C}{2}}.$$

Wystarczy teraz przyjąć stałą C taką, że wyrażenie po prawej stronie jest większe od 2025. Wówczas $\left| f\left(-\frac{i}{2}\right) \right| > 2025$, więc w szczególności $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| > 2025$. $\square$

Rozwiązanie wzorcowe zadania nr 3 z egzaminu poprawkowego

Zadanie 3. To zadanie składa się z trzech punktów.

(a) Proszę udowodnić istnienie takiej funkcji całkowitej g , że

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z^3 \cdot g(z) = e^{iz} - 1 - iz + \frac{z^2}{2}.$$

(b) Proszę obliczyć

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(t) dt,$$

przy czym R przyjmuje tu jedynie wartości dodatnie (a więc rzeczywiste).

(c) Proszę obliczyć wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^3} dt.$$

Rozwiązanie.

(a) Korzystając ze znanego rozwinięcia funkcji $\exp$ w szereg Maclaurina (o nieskończonym promieniu zbieżności) rozwińmy funkcję $e^{iz} - 1 + iz + \frac{z^2}{2}$ w szereg potęgowy (o nieskończonym promieniu zbieżności):

$$\begin{aligned} e^{iz} - 1 - iz + \frac{z^2}{2} &= \left(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \right) - 1 - iz + \frac{z^2}{2} = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \stackrel{n=k+3}{=} z^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+3} z^k}{(k+3)!} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+3} z^k}{(k+3)!}$, przy czym równość ma miejsce dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

(Inny sposób: funkcja g jest holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jako iloraz funkcji holomorficzych $e^{iz} - 1 + iz + \frac{z^2}{2}$ i z^3 . Jedynym problematycznym punktem jest zatem $z = 0$, gdzie iloraz $\frac{e^{iz} - 1 + iz + \frac{z^2}{2}}{z^3}$ ma osobliwość. Teraz wystarczy sprawdzić, że jest to osobliwość pozorna, na przykład licząc granicę $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1 + iz + \frac{z^2}{2}}{z^3}$.)

(b) Rozważmy całkę z funkcji g po konturze Γ będącym sumą odcinka $[-R, R]$ oraz górnego półokręgu o parametryzacji $\theta \mapsto Re^{i\theta}$, gdzie $\theta \in [0, \pi]$. Ponieważ g jest całkowite, oczywiście

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0, \quad \text{wobec czego} \quad \int_{-R}^R g(z) dz = - \int_{R\text{-półokrąg}} g(z) dz.$$

Całkę po półokręgu możemy rozbić na składniki

$$\int_{R\text{-półokrąg}} g(z) dz = \int_{R\text{-półokrąg}} \frac{e^{iz}}{z^3} dz - \int_{R\text{-półokrąg}} \frac{1}{z^3} dz - \int_{R\text{-półokrąg}} \frac{i}{z^2} dz + \frac{1}{2} \int_{R\text{-półokrąg}} \frac{1}{z} dz.$$

Zauważmy, że pierwsze trzy składniki znikają w granicy $R \rightarrow +\infty$, co wynika z oszacowań $|\frac{e^{iz}}{z^3}| \leq \frac{1}{R^3}$, $|\frac{1}{z^3}| \leq \frac{1}{R^3}$, oraz $|\frac{i}{z^2}| \leq \frac{1}{R^2}$ prawdziwych na półokręgu. Z kolei ostatnią całkę możemy policzyć bezpośrednio

$$\frac{1}{2} \int_{R\text{-półokrąg}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{Re^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = \frac{i\pi}{2}.$$

Ostatecznie

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(z) dz = -\frac{i\pi}{2}.$$

(c) Zaczniemy od obserwacji, że funkcja podcałkowa jest parzysta, wobec czego

$$\int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{t - \sin t}{t^3} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{t - \sin t}{t^3} dt.$$

Teraz zauważmy, że dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\Im(g(t)) = \Im\left(\frac{e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2}}{t^3}\right) = \Im\left(\frac{\cos(t) + i \sin(t) - 1 - it + \frac{t^2}{2}}{t^3}\right) = \frac{\sin(t) - t}{t^3}.$$

Wobec powyższego

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{t - \sin(t)}{t^3} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \Im(-g(z)) dz = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \Im\left(\int_{-R}^R g(z) dz\right) = \Im\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wobec wyników z poprzedniego punktu wnioskujemy, że wartość szukanej całki wynosi $\frac{\pi}{4}$.

Dwa słowa o kryteriach oceniania: Za punkt (a) można było dostać 4 punkty. Zasadniczo ten punkt nie budził problemów. Pojedyncze punkty odbierałem na przykład za brak komentarza na temat promienia zbieżności rozwinięcia g w szereg potęgowy.

Punkty (b) i (c) rozpatrywałem łącznie, gdyż są ze sobą związane. W sumie za te dwa punkty można było uzyskać 11 punktów. Pełnych lub prawie pełnych rozwiązań było stosunkowo mało. Częściowe punkty dawałem za następujące elementy rozumowania:

- do 3 punktów za spostrzeżenie, że całka z g (lub odpowiednia całka w punkcie (c)) po zamkniętym konturze wynosi zero i propozycję odpowiedniego konturu do całkowania
- do 2 punktów za rozumowanie polegające na szacowaniu poszczególnych składników całki, lub rachunku tych składników przy pomocy odpowiedniej funkcji pierwotnej. Częstym błędem przy szacowaniu całki na górnym półokręgu było pomijanie składnika $\frac{1}{z}$ z uwagi na oszacowanie $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{R}$ bez refleksji, że całkujemy po konturze długości πR .
- do 1 punktu za obserwację na temat parzystości funkcji w punkcie (c)
- do 2 punktów za zauważenie związku pomiędzy punktami (b) i (c)
- do 2 punktów za poprawne wyniki liczbowe
- pojawiały się też próby uzyskania wyniku przez całkowanie rozwinięcia funkcji $g(z)$ wyraz po wyrazie. Zasadniczo nie prowadzą one do wyniku, ale za taką próbę można było uzyskać do 2 punktów. W pojedynczych przypadkach próba całkowania wyraz po wyrazie skutkowałą obserwacją na temat związku całek z punktu (b) i (c), co było premiowane dodatkowymi punktami.

Egzamin poprawkowy z Funkcji Analitycznych (19 II 2025)

4. Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest całkowita (tzn. holomorficzna na $\mathbb{C}$), a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 0$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(n)}(z) - f(z)| \right) = 0,$$

przy czym $f^{(n)}$ oznacza tu n -tą pochodną (zespólną) funkcji f . Proszę dowieść, że $f(\pi) = 0$.

Przykładowe rozwiązanie: Funkcja f jest całkowita, toteż całkowite (więc różniczkowalne w sensie zespolonym na dysku $\mathbb{D}$) są także wszystkie jej pochodne. Warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(n)}(z) - f(z)| \right) = 0$ wyraża jednostajną zbieżność $f^{(n)}$ do f na $\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$; w szczególności $f^{(n)}$ zbiega **niemal** jednostajnie do f na $\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$, zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa $(f^{(n)})'$ dąży niemal jednostajnie do f' na $\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$, co oznacza, że $f^{(n+1)}$ zbiega niemal jednostajnie do f' na $\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$, a więc po prostu $f^{(n)}$ zbiega niemal jednostajnie do f' na $\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zbieżność niemal jednostajna pociąga oczywiście punktową (każdy jednoelementowy podzbiór dysku $\mathbb{D}$ jest zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej), stąd

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = f'(z).$$

Co za tym idzie,

$$\frac{d}{dz} (f(z)e^{-z}) = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = (f'(z) - f(z))e^{-z} = 0 \cdot e^{-z} = 0$$

na $\mathbb{D}$, a ponieważ dysk $\mathbb{D}$ jest obszarem, dowodzi to, iż $z \mapsto f(z)e^{-z}$ jest funkcją stałą na $\mathbb{D}$, czyli istnieje taka liczba zespolona u , że $\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = ue^{-z}$. Ponadto z założeń zadania wnioskujemy, że

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 0,$$

stąd zaś $u = ue^0 = ue^{-0} = f(0) = 0$, co oznacza, że $f \equiv 0$ na $\mathbb{D}$, więc 0 jest miejscem zerowym funkcji f , które nie jest zerem izolowanym. Skoro f jest funkcją całkowitą, a płaszczyzna zespolona jest obszarem, to z zasady izolowanych zer wnioskujemy, że $f \equiv 0$ na $\mathbb{C}$; w szczególności $f(\pi) = 0$, co było do udowodnienia.

Uwaga: Twierdzenie Weierstrassa nie bez powodu mówi o **niemal** jednostajnej zbieżności, a nie po prostu o zbieżności jednostajnej. Na przykład sumy częściowe szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} z^n$ zbiegają do jego sumy jednostajnie na $\mathbb{D}$ (wynika to z kryterium majoryzacyjnego Weierstrassa), a mimo to ich pochodne **nie** zbiegają **jednostajnie** na $\mathbb{D}$ do pochodnej jego sumy (dość łatwo wykazać, że ich ciąg nie spełnia jednostajnego warunku Cauchy'ego na $\mathbb{D}$), choć oczywiście zbiegają na $\mathbb{D}$ do pochodnej jego sumy **niemal** jednostajnie. Niektóre rozwiązania zadania czwartego prześlizgiwały się zbyt beztrosko nad różnicą między tymi dwoma rodzajami zbieżności.

Uwaga 2: Wcale nie jest prawdą, że jeśli funkcje całkowite φ_n (a właściwie ich obcięcia do otwartego dysku jednostkowego $\mathbb{D}$) zbiegają na $\mathbb{D}$ jednostajnie do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, to również na całej płaszczyźnie zespolonej zbiegają one (choćby punktowo) do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Prosty kontrprzykładem na taką rzekomą wersję zasady identyczności są funkcje określone wzorem $\varphi_n(z) = z^n/n$.

Alternatywne rozwiązanie: Ponieważ funkcja f jest całkowita, to na całej płaszczyźnie zespolonej rozwija się w swój szereg Taylora (jest to udowodniony na wykładzie wniosek ze wzoru całkowego Cauchy'ego):

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Skoro zaś funkcja f jest całkowita, to całkowite są również wszystkie jej pochodne (to również udowodniony na wykładzie wniosek ze wzoru całkowego Cauchy'ego), więc można do nich zastosować analogiczne rozumowanie, otrzymując

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad f^{(m)}(z) = f^{(m)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(0)}{n!} z^n.$$

Gdy $z \in \mathbb{D}$, to $|z^n| = |z|^n \leq 1$, z nierówności trójkąta wnioskujemy zatem, że

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(m)}(z)| &\leq |f^{(m)}(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f^{(m+n)}(0)|}{n!} \\ &\leq \sup_{k: k \geq m} |f^{(k)}(0)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sup_{k: k \geq m} |f^{(k)}(0)|}{n!} = e \cdot \sup_{k: k \geq m} |f^{(k)}(0)|, \end{aligned}$$

skąd już wynika, że

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(m)}(z)| \right) \leq e \cdot \limsup_{m \rightarrow \infty} |f^{(m)}(0)|.$$

Ponieważ jednak jedno z założeń zadania mówi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 0$, a więc również $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(0)| = 0$, to prawa strona powyższej nierówności jest zerem. Stąd wnioskujemy, że $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(m)}(z)|$ zbiega do zera, gdy $m \rightarrow \infty$, na mocy nierówności trójkąta zatem

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(m)}(z)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(m)}(z) - f(z)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0;$$

o zbieżności drugiego składnika do zera mówiły już same założenia zadania. W ten sposób udowodniliśmy, że $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| = 0$, czyli $f \equiv 0$ na $\mathbb{D}$, równość $f(\pi) = 0$ wywodzimy stąd zaś tak samo, jak w zakończeniu poprzedniego rozwiązania.